仕事とエネルギー

春日 悠

2016 年 9 月 22 日

生物の行動を「エネルギー」の観念から説きおこすのが,「質量」や「長さ」の観念から説きおこそうとする以上の妥当性をもっているというのも，考えてみれば筋の通らない話である．結局のところ，エネルギーというのは，$<$質量 $\times$ 速度の二乗$>$ 以外の何者でもないわけだ．“心的エネルギー” なるものが，そのような次元を持つと本気で主張する行動学者はいないだろう．

グレゴリー・ベイトソン『精神の生態学』[1]

目 次

1 仕事

1.1 仕事の定義

新しい機械を作ったとしよう．それが既存のものよりも優れていると主張するには，どうしたらよいだろう？ たとえば，従来のものよりも燃料が半分で済みます！ とか，あるいは，従来のものよりも 2 倍の力が出ます！ といった主張になるだろうか．燃料はよいとして，機械の「働き」はどう測ればよいか．なにかの製品を作る機械であれ

ば，ある時間に作られる製品の個数で評価できるだろう．蒸気機関のように，鉄道でも船でも使えるような汎用的な機械だとどうだろう？

蒸気機関が誕生した 18 世紀，動力としてまだ馬が利用されていた．車を馬に引かせていたし，馬車鉄道なんてものもあった．蒸気機関車に乗ってシャーロック・ホームズが活躍した 19 世紀ヴィクトリア朝時代でもまだ，馬車は主要な移動手段だったようだ．当時の人々にとってはきっと,「この機械は馬何頭分の仕事をします！」という表現であればピンときただろう．

それで，馬の仕事をどう表すべきか．馬は重いものを運ぶだろうが，あまりに重いものはそう遠くには運べないだろう．でも軽いものだったら結構遠くまで運んでくれるだろう．そう考えると，馬の仕事を「重さ × 距離」で考えるとよさそうである．機械の場合，速さも問題だろう．同じ燃料で馬 1 頭分の仕事に「1 日かかります」なのか,「半日でいけます」なのかでは，機械の性能は異なるといえるだろう．そこで「重さ × 距離」を時間で割った量で仕事を評価するのがよさそうである．仕事をこのように定義したのは蒸気機関を改良して売り出したボールトンとワットで，彼らは 1 馬力を 33000 フィート・ポンド/分と定義したらしい [2] が，変換すると 0.7457 kW であり，これは現在の 1 英馬力 (HP) である．馬力の定義には仏馬力 (PS) もあり，HP は Horse Power の略だから，なるほど，PS もおフランス語で「馬の力」か！ と期待させておいてドイツ語だったりする (Pferde Stärke).

あらためて定義すると,「仕事」 (work) とは力と距離の積であり，単位は N m である．ワットらの「仕事」は「仕事率」 (英語では単純に power) で，単位は N m/s であり，これはワットにちなんで W (ワット) と表す．上では仕事を「重さ × 距離」と言っているが，昔は力を重さで表したので，同じ意味である．今でも古い人は 1 kgw (= 9.8 N) を用いる．1 kg のものが与える荷重ということで，まあわかりやすくはある．だいたい「荷重」(load) という言葉からして「荷の重さ」だし，重さのほうがしっくりくる．1 kgw が約 10 N なら，1 N は 100 g の重さであり，中くらいのみかん 1 個分が与える力である．

たとえばお馬さんが，ものを力 f で引っ張って，距離 x だけ移動させたとする．そのとき，お馬さんがした仕事 W は

$$W = fx \tag{1}$$

である．だが，厳密にはそうそう一定の力でずっと引っ張っていられるものではない．ある距離 Δx_1 だけは力 f_1 で，ある距離 Δx_2 だけは力 f_2 で…といった感じになるだろうから，厳密には積分になる．

$$W = \int_0^x f dx \tag{2}$$

ワットの場合は蒸気機関であったから，そのキモはシリンダ内のピストンの運動であり，力は圧力，移動距離は体積の膨張分である．シリンダ内の断面積は一定としてそれを A とすると，ピストンを押す圧力を p，シリンダ内の体積膨張分を ΔV とすると，圧力がする仕事 ΔW は $f = pA$，$\Delta x = \Delta V/A$ だから $\Delta W = p\Delta V$ である．した

がって，仕事の総量 W は

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \tag{3}$$

である．実際はピストンは行って帰って元の位置に戻ってくるので，機関が外に対して行う仕事は，膨張時に外に対して行う仕事から収縮時に外からされる仕事を差し引いたものである．これは p-V 線図におけるサイクル内の面積に当たる．

$$W = \oint p dV \tag{4}$$

1.2 仕事の原理

重さ m の物体を滑車で高さ h だけまっすぐ持ち上げたとする．重力加速度を g とすると，物体を持ち上げるのに必要な力は mg なので，そのときの仕事は mgh である．

物体を h の高さに持ち上げさえすればよいのなら，角度 θ の斜面上を滑らせて運んだ方がラクそうである．摩擦を考えないとすると，必要な力は $mg \sin\theta$ になり，$\sin\theta$ は 1 より小さいので力は小さくなる．ただし，物体の移動距離は $h/\sin\theta$ と長くなる．したがって仕事は結局 mgh になり，垂直に持ち上げた場合と同じになる．これを仕事の原理という．ラクはできないということである．ただし，必要な力は確かに小さくなっているのだから，無理そうな仕事でも工夫次第でどうにかなるかもしれないということでもある．

ところで，重さ m の物体を高さ h の位置まで人間がよっこいしょと持ち上げてじっとしている場合，持ち上げた分は仕事をしたことになるが，じっとしている時間は物理的にはなんら仕事をしていないことになる．にもかかからず，それなりに体力を奪われる．それで「お前は『仕事』をしていない」などと言われたら理不尽な感じがするだろう．体力を消耗しているということは，食物から取り入れられた仕事のもと (次に出てくるエネルギー) が消費されて，体内で仕事が行われていることになる．物体にとって仕事が行われていないにもかかわらず，体内で仕事が行われるのは，身体の構造の問題である．身体はテーブルのようにはいかないということである．

2 エネルギー

2.1 エネルギーと位置エネルギー

高さ h だけ持ち上げられた重さ m の物体 M は，支えがなくなると落下して h だけ下に落ちる．その際，物体 M は重力により mg の力で下に引かれるから，滑車を使って物体 M と地面にある物体 M′ を結びつけると，物体 M′ は mg の力で上に引っ張られるだろう．M′ が同じ重さ m であれば，M は M′ を高さ h まで持ち上げる能力を持つ．

ある物体が仕事を行う能力を持っているとき，その物体はその仕事に相当するエネルギー (energy) を持っているという．上の例では，高さ h だけ持ち上げられた重さ m の物体は，mgh だけの仕事を行う能力を持っているので，mgh のエネルギーを持って

いるという．高さ h が高ければそれだけ大きなエネルギーを持っているし，低ければエネルギーは小さくなる．このように，位置によって決まるエネルギーを特に位置エネルギー (potential energy) という．

仕事の原理より，位置エネルギーによる仕事は経路によらず，始点と終点だけで決まる．このように，働いている力による仕事が経路によらないとき，その力を保存力 (conservative force) という．その微分が保存力を与えるものをポテンシャル (potential) という．ポテンシャルを U とすると，保存力 (ベクトル) f は次式で与えられる．

$$f = -\nabla U \tag{5}$$

位置エネルギーはポテンシャルであり，任意の高さ y (上向きを正とする) における位置エネルギー mgy の y による微分は，確かに保存力としての重力 $-mg$ を与える

2.2 運動エネルギー

重さ m の物体を静止状態から速度 v まで加速させたとする．このときの仕事はどう見積もられるか？ 物体にかかる力は $f = mdv/dt$ であるので，仕事 W は

$$W = \int_0^x m\frac{dv}{dt}dx \tag{6}$$

ここで

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dx}{dt} \tag{7}$$

したがって

$$W = \int_0^x mv\frac{dv}{dx}dx = \int_0^v mvdv = \frac{1}{2}mv^2 \tag{8}$$

速度 v を持つ重さ m の物体は，他の物体に仕事を行う能力を持つので，エネルギーを持っている．そのエネルギーは，上述の議論とは逆に速度 v から静止状態まで減速されるときになされる仕事として考えられ，$\frac{1}{2}mv^2$ である．このエネルギーを，運動する物体がもつエネルギーということで運動エネルギー (kinetic energy) という．

ところで，位置エネルギーにしても運動エネルギーにしても，ある基準からの相対的なものである．位置エネルギーの高さはある基準高さを 0 として測った高さであるので，たとえ物体の位置エネルギーが 0 でも，下に穴を掘って穴の底を基準高さに取ってやれば改めて物体の位置エネルギーを考えることができるし，実際その穴に物体を落とせば物体は仕事をすることになる．運動エネルギーについても同様で，物体の速度は地面なり床なりの静止点を基準にした相対速度である．

2.3 力学的エネルギー保存則

スーパーボールのように弾性の高い物体は，ある高さから静かに真下に落とすと，堅くてきれいな地面であればほぼ同じ高さにまで跳ね返って戻ってくる．理想な状態を考えて，重さ m の物体を高さ h から静かに真下に落としたらちょうど高さ h の位置

まで戻ってきたとする．このとき，最初のエネルギーは mgh で，最後のエネルギーも mgh である．落下途中の高さは h より低いのだから，位置エネルギーは落下するにしたがって小さくなっていくはずである．その代り，速度は速くなっていくため，運動エネルギーは増加していく．最初と最後は物体の高さの頂点で，速度は 0 で運動エネルギーも 0 ということになるから，最初 mgh あった位置エネルギーがしだいに $mv^2/2$ の運動エネルギーに変わっていき，地面で跳ね返った後は逆に運動エネルギーから位置エネルギーに変わり，最後には位置エネルギーが mgh に回復していると考えられる．

物体が移動中のときのエネルギーを求めてみよう．重力に引かれる物体の方程式は次のように表される．

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = v = -gt + v_0 \tag{10}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \tag{11}$$

ここで，y は鉛直方向の位置を表し，地面を 0 とし，上方向を正に取っている．

物体が落下しているときの方程式は次のようになる．

$$v = -gt \tag{12}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{13}$$

任意の位置 y におけるエネルギーを計算するために，その時の速度を求めると，次のようになる．

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}} \tag{14}$$

$$v = -\sqrt{2g(h-y)} \tag{15}$$

位置エネルギーと運動エネルギーの和は

$$\begin{aligned} mgy + \frac{1}{2}mv^2 &= mgy + \frac{1}{2}m2g(h-y) \\ &= mgy + mg(h-y) \\ &= mgh \end{aligned} \tag{16}$$

したがって，落下中の物体のエネルギーは，最初の位置エネルギーのままである．

物体が上昇中の場合を考えよう．地面における速度は，落下の方程式で $y = 0$ のときの速度であるので

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{17}$$

$$v = -\sqrt{2gh} \tag{18}$$

物体が地面で勢いを落とさずに跳ね返ってくる理想的な状態を想定しているので，物体上昇の場合の初期速度は $v_0 = \sqrt{2gh}$ である．これより，物体が上昇しているときの方程式は次の通りである．

$$v = -gt + \sqrt{2gh} \tag{19}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (\sqrt{2gh})t \tag{20}$$

位置 y のときの時刻と速度は

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \pm \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}} \tag{21}$$

$$v = \mp\sqrt{2g(h-y)} \tag{22}$$

この場合，v が負になることはないから

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}} \tag{23}$$

$$v = \sqrt{2g(h-y)} \tag{24}$$

速度は落下時と符号が逆になっているだけなので，位置エネルギーと運動エネルギーの和はやはり mgh である．

以上から，物体が落下して跳ね返って戻ってくるまで，位置エネルギーと運動エネルギーの和は常に mgh であり，物体が運動中の位置エネルギーおよび運動エネルギーはその和が mgh になるように変化している．最初と最後は速度が 0 なので 100 % 位置エネルギーで mgh，地面では位置エネルギーが 0 なので $mv^2/2 = mgh$ である．位置エネルギーと運動エネルギーの和を力学的エネルギー (mechanical energy) といい，これが一定に保たれることを力学的エネルギー保存則 (law of conservation of mechanical energy) という．

上では地面における物体の速度を運動の方程式から求めたが，力学的エネルギー保存則がわかっているなら，単純に $mv^2/2 = mgh$ から $v = \sqrt{2gh}$ と直接的に求まる．

3 熱とエネルギー保存則

3.1 熱とエネルギー保存則

力学的エネルギーが保存するとは言ってもそれは理想的な状態の話で，いかによく跳ねるスーパーボールでも永遠に跳ね続けたりはしない．跳ねていた物体が転がる時，エネルギーはどこにいってしまったのだろうか？

ところで，アリストテレスは，物体の運動は減衰するのがふつうであって，永久に運動し続けるほうが特別だと考えた．一方，ガリレオは，物体は本来は永久に運動し続けるのであって，運動が減衰するのは空気抵抗や他の物体との摩擦などによって邪魔されるからだと考えた．これはただ視点の違いにすぎないのであって，どちらが正しくどちらが間違っているということではなく，問題はどちらが実際の現象を説明しやすいかということである．

天動説と地動説の話も同様である．ガリレオの地動説が教会に拒否されたのは，一般的に広く信じられているように宗教的な問題ではなく，既存の天動説よりも説明能力が劣っていたからにすぎない．その後，ケプラーがティコ・ブラーエの観測結果を用いて正しい (ガリレオの誤謬を修正したという意味で) 地動説のモデルを立て，星々の運行について既存の天動説よりもより精度の高い予測をしてみせたため，しだいに地動説が受け入れられていった．それまで天動説が用いられていたのは決して妄信からというだけではなく，それなりに使い物になったためであった．これといって特に有用とも思われないコペルニクス-ガリレオの地動説をあえて取るほうが当時はよほど妄信に思えただろう．

物理学の理論はけがれなき事実から地道に打ち建てられると思われがちだが，素の事実などというものはない．実際は常識的な理解によって把握された基本的な事実に対してうまい仮説が立てられたあとは，その理論に基づいて新たな事実が収集される．理論を背景にして解釈された事実が理論の足元を打ち崩すことはめったになく，事実はその理論の肥やしになるばかりである．あとから見たら「間違っている」理論ですらそうである.「間違っている」とはどういうことだろう？「もっと有用な理論がある」ということにすぎない．

人は無反省な認識に基づいた素朴な存在論で物事を理解しがちで,「正しい」理論が存在すると思いがちだが，我々にとってしっかりと存在していると思われるモノの理論すら所詮は抽象論である．エネルギーの理論こそまさにそうである．長々と何が言いたいかというと，抽象論により事実よりも理論が先行することの正当性を説いているのである．

19 世紀のドイツの人ローベルト・マイヤーは，ジュールに先んじて熱の仕事当量を算出したが，問題へのアプローチの仕方がかなり独特だったため，生前はあまり評価されなかったらしい．彼はエネルギー保存則の発見者の一人として知られているようだが,「発見」というのは適切な表現だろうか？

彼はいわゆる加速度の原因としての力は運動の原因としては不適切と考えたようである．いくら重力がかかっていても位置エネルギーがなければ物体は運動しないのだから，重力は運動の直接の原因ではない．したがってマイヤーは，今でいうエネルギーこそが運動の原因と考える．マイヤーはこれを「力」と呼んだが，この「力」は量的には保存され，質的には変換されうるものとして規定された．つまり，マイヤーは熱と仕事の互換性を見出して力学的エネルギーと合わせて全エネルギーが保存されることを発見したのではなくて，はじめから保存されるものとしてエネルギー概念に当たるものを規定しておいて，その枠組みに熱を組み入れることで，熱と仕事に互換性が

なければならないとした．実際，その考えに基づいて，過去に行われたいくつかの実験 (彼自身は実験を行わなかった) の結果から熱の仕事当量を算出した．

実験により仕事から熱を発生させて直接的に仕事当量を求めたジュールに比べると，一見奇妙な論の進め方に見える．だが，理論なしには考えを進めることはできない．はじめに仮説ありき．マイヤーほどあからさまでないだけで，あるいは気が付いていないだけで，誰だってある信念を内に抱いて論を進める．その信念にどうしても合わない事実にぶち当たったら，まともな人間ならその信念を修正するか放棄するかするだろうし，そうでなければ事実の認識のほうを拒否する．マイヤー流のエネルギー概念においては，より抽象的な概念によって事実は覆われるべしという信念があったからこそ，より広く実験事実を取り込んで拡大していける豊かなツールになりえたのである．

物理学者のファインマンは，エネルギー保存則を積木で例えている [4]．子供がどんな遊び方をしようと，最初に 28 個あった積木は常に 28 個あるはずである．あるとき母親が積木を数えてみて 27 個しかなかったとしても，1 個消えてしまったけどしょうがない，とは考えない．それはたとえばベッドの下とか，部屋の中を探せば必ずあるはずだと考える．いくら探しても見つからなければ，箱の中とか部屋の外，ひょっとしたら家の外にあるかもしれない，とにかくどこかにはあるだろうと考える．積木が勝手に消えてなくなることはない．なくなって見えるのは，考えている系が狭く，それが考えている系の外に出て行ってしまっているからである．マイヤーは，この「積木は勝手になくならない」という至極常識的なことを理論的概念に対する原理として要請したまでのことである．ちなみにファインマンは，エネルギーとは何かについては「現代の物理学では何ともいえない」と言っている．

エネルギーは，もとは仕事をする能力であったが，今や保存量の一種として規定された概念であり，説明のためのツールである．エネルギーは力学的エネルギー，熱エネルギー，その他のエネルギーを含めて相互変換可能で，全エネルギー量は保存するとされる．これをエネルギー保存則 (law of conservation of energy) という．はじめのスーパーボールの話にようやく戻ると，跳ねていた物体が転がる時，エネルギー保存則から力学的エネルギーは空気抵抗や地面との摩擦により熱エネルギーに変換されて散逸してしまったと考えるのである．実際，関係する物体の温度を測ればそれを証明することも可能である．

3.2 熱の仕事当量と熱力学の法則

マイヤーやサディ・カルノーは，理論的考察によって熱と仕事の互換性を見出し，熱の仕事当量を見積もった．一方ジュールは，機械の仕事による水温の上昇によって仕事当量を直接測定した．仕事を W [N m]，それに対する熱量を Δq [cal] とすると，熱の仕事当量 J は $J = W/\Delta q$ である．現在の値は $J = 4.184$ である [5]．熱の仕事当量を求めたジュールにちなんで，仕事の単位 N m は J (ジュール) と表される．W (ワット) との関係は W = J/s である．いまや熱量の単位も J や W で表されるので，熱の仕事当量は煩わしい単位変換の係数にすぎないように思えるが，本来はそれ以上の意味を持っている．

熱と仕事の互換性から，熱力学第一法則が得られる．熱により仕事が生じる時，それ相当の熱が消費される．ただし，熱機関は物質を用いて仕事を行うから，熱はすべて外部仕事に変換されるのではなく，一部は物質の内部仕事や可感熱に消費される．そこで，クラウジウスは内部仕事や可感熱を表す内部エネルギーというものを導入した．熱量を dq [cal]，外部仕事を dW_{ex} [J]，内部エネルギーを dU [J] とすると，熱力学第一法則は次式で表される．

$$Jdq = dU + dW_{ex} \tag{25}$$

現在は熱量にも仕事の単位が使われるのでわざわざ仕事当量 J を書く必要はないが，本来はむしろ上式こそが熱と仕事の単位変換の根拠である．

ジュールは熱と仕事は無条件に相互変換可能と考えていたようである．実際には，仕事はいつでも熱に変換できるが，熱を仕事に変換するには条件がある．この熱の特殊性を規定するのが熱力学第二法則である．50 ℃，100 ℃の 2 つに分けられた水と，それを混ぜた 75 ℃の水では，基準温度から測った熱量は同じでも質が異なる．前者からは仕事を取り出せるが，後者からは仕事を取り出せない．位置エネルギーで例えれば，山の上にたまっている水は，地上から見ると高度があるという意味では位置エネルギーを持っているが，それが下に落ちなければ仕事を行うことはできない．つまり，水の運動から仕事を取り出すには高度そのものではなく高低差が重要であり，熱についても温度の高低差が必要なのである．

参考文献

[1] G・ベイトソン：精神の生態学 改訂第 2 版，新思索社 (2008).

[2] 山本義隆：熱学思想の史的展開 2，ちくま学芸文庫 (2009).

[3] 山本義隆：熱学思想の史的展開 3，ちくま学芸文庫 (2009).

[4] ファインマン，レイトン，サンズ：ファインマン物理学 I 力学，岩波書店 (1967).

[5] 国立天文台 編：理科年表 平成 27 年 第 88 冊，丸善出版 (2014).