

風上差分

春日 悠

2017年10月9日

目次

1	風上差分	1
1.1	差分近似	1
1.2	風上差分	3
1.3	流束による表現	4
2	高次精度風上差分	5
2.1	線形風上差分 (2次精度風上差分)	5
2.2	QUICK	6
2.3	3次精度風上差分	6
2.4	MUSCL 内挿	7
2.5	Lax-Wendroff 法	8
2.6	Warming and Beam 法	8
3	単調性を保つ高次精度風上差分スキーム	8
3.1	有界性と単調性	8
3.2	緩和修正法	9
3.3	高解像度スキーム	10
3.4	TVD スキーム	10
3.5	NVD スキーム	13
4	有限体積法における離散化スキーム	17
4.1	有限体積法における離散化スキーム	17
4.2	中心差分	17
4.3	1次精度風上差分	17
4.4	線形風上差分	18
4.5	TVD・NVD スキーム	18
4.6	勾配制限	19
5	各種スキームの比較	20

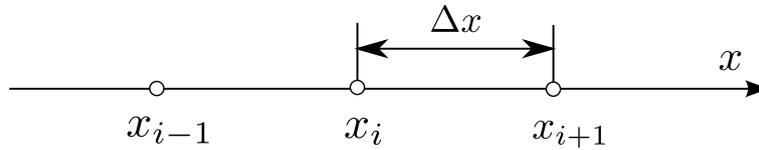


図 1: 格子点

1 風上差分

1.1 差分近似

関数の微分を，有限個の点列上で表された変数による代数式で近似することを考える．関数 $\phi(x)$ を考え，これを $x + \Delta x$ でテーラー展開すると次式になる．

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \frac{d\phi(x)}{dx} \Delta x + \dots \quad (1)$$

展開を 2 項で打ち切ると，次式を得る．

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \approx \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

これを関数 $\phi(x)$ の微分の差分近似という．

ここで，点の座標をそれぞれ x_1, x_2, \dots, x_n と表す．これを格子点という．その中で注目している点を x_i とし，その前の点を x_{i+1} ，その後の点を x_{i-1} などと表す (図 1)．点どうしの距離は Δx とする．また， $\phi_i = \phi(x_i)$ と表す． ϕ_{i+1} でテーラー展開すると次式になる．

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{d\phi_i}{dx} \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

ここで $O(\Delta x^2)$ というのはオーダーといい，だいたいこの程度の大きさ (ここではせいぜい Δx^2 くらい) という程度の意味である．テーラー展開を打ち切る場合，このオーダーが打ち切り誤差であり，近似精度を表す指標となる．上式を変形する．

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4)$$

右辺第 2 項を無視して

$$\frac{d\phi_i}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (5)$$

ここで無視した $O(\Delta x)$ は Δx の 1 乗のオーダーなので，この差分近似の精度は 1 次であるとか，1 次精度であるという．この差分は x_i の前の x_{i+1} を使ったものなので前進差分という．同様に後退差分が次式で表される．

$$\frac{d\phi_i}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (6)$$

関数 $\phi(x)$ について, ϕ_{i+1}, ϕ_{i-1} でそれぞれテーラー展開を行うと, つぎのようになる.

$$\begin{aligned}\phi_{i+1} &= \phi_i + \frac{d\phi_i}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \\ \phi_{i-1} &= \phi_i - \frac{d\phi_i}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)\end{aligned}\tag{7}$$

ここで $\phi_{i+1} - \phi_{i-1}$ をとると

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)\tag{8}$$

これより

$$\frac{d\phi_i}{dx} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}\tag{9}$$

これを中心差分 (central difference) という. 2次精度である.

また, $\phi_{i+1} + \phi_{i-1}$ をとると

$$\begin{aligned}\phi_{i+1} &= \phi_i + \frac{d\phi_i}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\phi_i}{dx^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \\ \phi_{i-1} &= \phi_i - \frac{d\phi_i}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\phi_i}{dx^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4)\end{aligned}\tag{10}$$

なので, 3階微分の項が打ち消されて

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{d^2\phi_i}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4)\tag{11}$$

これより

$$\frac{d^2\phi_i}{dx^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)\tag{12}$$

したがって

$$\frac{d^2\phi_i}{dx^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}\tag{13}$$

これは2階微分の中心差分であり, 2次精度である.

1.2 風上差分

つぎの移流方程式を考える.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0\tag{14}$$

ここで u は移流速度で, 特に断らない限り $u > 0$ とする. これを差分近似で表す. このように連続体の方程式を代数式で近似することを離散化 (discretisation) という. いまは時間微分の項を前進差分, 空間微分の項 (移流項) を中心差分で近似する.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0\tag{15}$$

ここで変数の右肩の n などは時間ステップを表す．変形して

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) \quad (16)$$

ここで c は $c = u\Delta t/\Delta x$ でありクーラン数と呼ばれる．このように $n+1$ の値を n の変数だけで表すことができる方法を時間に関する陽解法 (implicit scheme) という．そうでないものを陰解法 (implicit scheme) という．陽解法は陰解法よりも計算が簡単になる代わりにクーラン数についての安定条件があり， $|c| \leq 1$ である必要がある．この条件は CFL (Courant-Friedrich-Lewy) 条件とか，クーラン条件などと呼ばれる．これは時間刻み幅 Δt が制限されることを意味する．

上の式はつぎのように表される．

$$\phi_i^{n+1} = -\frac{1}{2}c\phi_{i+1}^n + \phi_i^n + \frac{1}{2}c\phi_{i-1}^n \quad (17)$$

ここでは $u > 0$ 考えているので $c > 0$ であり，右辺第 1 項の係数が負になる．これは，もし $\phi > 0$ だとしても場合によっては ϕ_i^{n+1} の値が負になりうることを意味している．数値的には不自然な振動として現れる．それでも問題がない場合もあるが， ϕ が絶対温度の場合は物理的にあり得ない値を生じることになる．

この問題を回避する単純な方法として，空間微分に後退差分を適用する方法がある．

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (18)$$

変形して

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) \quad (19)$$

この場合

$$\phi_i^{n+1} = (1-c)\phi_i^n + c\phi_{i-1}^n \quad (20)$$

となり， $c > 0$ かつ CFL 条件により $c \leq 1$ なので，右辺の係数はすべて正になる（むしろ係数を正にするために $|c| < 1$ という条件が必要ともいえる）．このように移流項の離散化に後退差分を用いる方法を風上差分という．この名前は風上から値を補間することを意味しており，実際は流速 u の正負を調べて補間方向を切り替える．一般に，風上側に補間の重みをつける差分を風上差分 (upwind difference) あるいは上流差分 (upstream difference) と呼ぶ．

上式は次式のように変形できる．

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (21)$$

右辺第 2 項までは中心差分であり，第 3 項は空間の 2 階微分 (拡散を意味する) を離散化した形になっている．したがって，風上差分は中心差分に数値的な拡散を加えて安定化したものと考えることができる．それゆえ解がなまることになる．

上記のように方程式を差分近似して解く方法を有限差分法，あるいは単純に差分法という．また，方程式の離散化の手段のことを離散化スキーム (discretisation scheme)，差分法では特に差分スキームなどという．ここでは風上差分として後退差分を用いたので，1 次精度風上差分スキームなどという．

1.3 流束による表現

移流方程式は、次式のようにも離散化できる．

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (22)$$

ここで $f = u\phi$ は流束 (flux) であり, $i+1/2$ は i と $i+1$ のあいだの $x_{i+1/2} = x_i + \Delta x/2$ の位置を意味する．これは格子点を囲む格子を考えたときの格子界面の位置である．この差分は2次精度である．ここでは u は一定なので, 便宜上つぎのように表す．

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (23)$$

整理して

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c(\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n) \quad (24)$$

このように表現した場合, 中心差分は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) \\ \phi_{i-1/2} &= \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (25)$$

これは格子界面の値を格子点の値で線形補間することを意味している．

風上差分の場合は, つぎのようになる．

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_i \\ \phi_{i-1/2} &= \phi_{i-1} \end{aligned} \quad (26)$$

これは格子界面の値を上流の格子点からそのままもってくることを意味している (図2のUD)．流速 u の符号を考慮すると次式のようになる．

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i & (u \geq 0) \\ \phi_{i+1} & (u < 0) \end{cases} \quad (27)$$

2 高次精度風上差分

2.1 線形風上差分 (2次精度風上差分)

1次精度風上差分では格子界面の値として上流の値をそのままスライドしたが, それを線形補間する方法が考えられる (図2のUD, LUD)．この方法を線形風上差分 (linear upwind difference) といい, 2次精度である．

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (x_{i+1/2} - x_i) \\ &= \phi_i + \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ &= \phi_i + \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

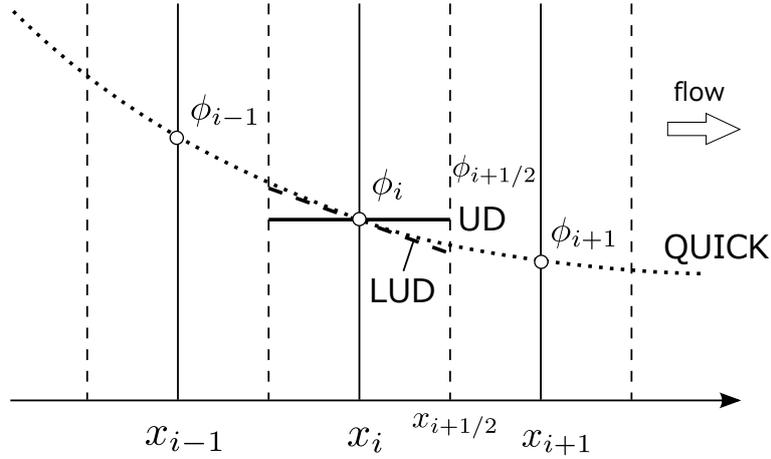


図 2: 風上差分 (UD: 1 次精度風上差分, LUD: 線形風上差分)

流速 u の正負を考慮すると次のようになる .

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i + \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_{i-1}) & (u \geq 0) \\ \phi_{i+1} + \frac{1}{2}(\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) & (u < 0) \end{cases} \quad (29)$$

このスキームは, 2 次精度風上差分と呼ばれることが多い .

上では勾配を後退差分で表したが、中心差分を用いる方法も考えられる .

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (x_{i+1/2} - x_i) \\ &= \phi_i + \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ &= \phi_i + \frac{1}{4}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (30)$$

流速 u の正負を考慮すると次のようになる .

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i + \frac{1}{4}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) & (u \geq 0) \\ \phi_{i+1} + \frac{1}{4}(\phi_i - \phi_{i+2}) & (u < 0) \end{cases} \quad (31)$$

2.2 QUICK

QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) [2] は 2 次多項式を構成して格子界面の値を補間する (図 2) . 次式を考える .

$$\phi(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 \quad (32)$$

係数 a_0, a_1, a_2 を $\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}$ を使って求め, $\phi_{i+1/2}$ を求める . 最終的に次式が得られる .

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{8}(3\phi_{i+1} + 6\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (33)$$

これは次式のように表すことができる．

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{1}{8}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (34)$$

これは中心差分に修正項が付加されたものであることを意味している．
流速 u の正負を考慮すると次のようになる．

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{8}(3\phi_{i+1} + 6\phi_i - \phi_{i-1}) & (u \geq 0) \\ \frac{1}{8}(3\phi_i + 6\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) & (u < 0) \end{cases} \quad (35)$$

補間自体は 3 次精度であるが，差分としては 2 次精度になる．

2.3 3 次精度風上差分

QUICK は格子界面の値を多項式で表したが，多項式を直接微分して差分を得る方法も考えられる．つぎの 3 次多項式を考える．

$$\phi(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3 \quad (36)$$

係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を $\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}$ を使って求め x_i で微分すると，次の 3 次精度風上差分が得られる．

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{2\phi_{i+1} + 3\phi_i - 6\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{6\Delta x} \quad (37)$$

格子界面の値で表現すると次式になる．

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{6}(2\phi_{i+1} + 5\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (38)$$

これは次式のように表すことができる．

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{8} \left(\frac{8}{3}\phi_{i+1} + \frac{20}{3}\phi_i - \frac{4}{3}\phi_{i-1} \right) \quad (39)$$

分数を小数で表すと

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{8} (2.67\phi_{i+1} + 6.67\phi_i - 1.33\phi_{i-1}) \quad (40)$$

これは QUICK の表現に近い．したがって QUICK は 2 次精度でありながら 3 次精度に近いと考えられる．

ちなみに，3 次多項式の代わりに 2 次多項式を用いた場合，2 次精度風上差分が得られる．

2.4 MUSCL 内挿

格子内の ϕ の平均値を次式で考える .

$$\phi_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \phi(x) dx \quad (41)$$

上式を満たすように ϕ を次式で定義する .

$$\phi(x) = \phi_i + \frac{1}{\Delta x} (x - x_i) \delta_i \phi + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2} \left\{ (x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right\} \delta_i^2 \phi \quad (42)$$

ただし

$$\begin{aligned} \delta_i \phi &= \frac{1}{2} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \\ \delta_i^2 \phi &= \phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1} \end{aligned} \quad (43)$$

これは MUSCL 内挿と呼ばれる [3] .

格子界面の値は , $u > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{1}{2} \delta_i \phi + \frac{\kappa}{4} \delta_i^2 \phi \\ &= \phi_i + \frac{1}{4} (1 - \kappa) (\phi_i - \phi_{i-1}) + \frac{1}{4} (1 + \kappa) (\phi_{i+1} - \phi_i) \end{aligned} \quad (44)$$

$u < 0$ のときは $i+1$ 側から

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_{i+1} - \frac{1}{2} \delta_{i+1} \phi + \frac{\kappa}{4} \delta_{i+1}^2 \phi \\ &= \phi_{i+1} - \frac{1}{4} (1 + \kappa) (\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1}{4} (1 - \kappa) (\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) \end{aligned} \quad (45)$$

パラメタ κ の値に応じて近似精度が変わる . $\kappa = 1$ のとき中心差分 , $\kappa = -1$ のとき 2 次精度風上差分 , $\kappa = 1/2$ のとき QUICK , $\kappa = 1/3$ のとき 3 次精度風上差分になる .

2.5 Lax-Wendroff 法

時間微分については 1 次精度の前進差分を考えてきたが , 時間差分の高精度化を考える . 格子点の値を時間について 2 階微分の項までテーラー展開する .

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \Delta t \frac{\partial \phi_i^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 \phi_i^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (46)$$

ここで時間の 2 階微分は , 移流方程式から空間の 2 階微分に変換できる .

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (47)$$

したがって

$$\frac{\partial \phi_i^n}{\partial t} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} u^2 \Delta t \frac{\partial^2 \phi_i^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) \quad (48)$$

これは 2 次精度である．空間 2 階微分と移流項に中心差分を適用すると，これにより移流方程式は次式のように離散化される．

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{1}{2}c^2(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (49)$$

これを Lax-Wendroff 法という．時間 2 次精度，空間 2 次精度である．風上差分 + 高精度項の形で表すと次式のようになる．

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{1}{2}c(c-1)(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (50)$$

2.6 Warming and Beam 法

Lax-Wendroff 法と同様の方法で，空間 2 階微分に $i-1$ の中心差分を適用し，移流項に 2 次精度風上差分を用いると，Warming and Beam 法とよばれる次式を得る．

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{1}{2}c(c-1)(\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n) \quad (51)$$

3 単調性を保つ高次精度風上差分スキーム

3.1 有界性と単調性

離散化スキームについて，物理量の有界性や単調性が問題になる．物理量が増えも減りもしないで移流するだけの場合，物理量は初期値の最小値と最大値の範囲内にある．これを有界性 (boundedness) といい，有界性を性質としてもつとき有界である (bounded) という．定常の現象の場合も同様で，発熱や冷却のない熱伝導問題では，領域内の温度は境界の温度の最小値と最大値のあいだにある．このような問題に対して有界性をもたない離散化スキームを用いた場合，非物理的な解を生じる可能性がある．

単調性 (monotonicity) は，物理量がオーバーシュートやアンダーシュートなどの振動を起こさない性質で，これを持つとき単調である (monotone) という．単調であるとき，振動が起らず有界性を破らないので，単調であるときは有界であると考えてよい．

有界性は計算の安定性と関連付けられ，両者はほぼ同じ意味で使われることがある．時間について陰解法を用いる場合や定常問題の場合，代数方程式を解くために反復法が使われる．反復法の収束条件として，係数行列の対角要素 (ここでは注目する格子点 i の係数) の絶対値が他の要素の絶対値の和よりも大きいという対角優位性 (diagonally dominant) をもつ必要がある．代数方程式がきちんと解けなければ計算が発散するか，解けても有界性が満たされない可能性がある．そのため，有界であるためには対角優位である必要があり，対角優位であるならば計算は安定するので，有界性をもつことは計算の安定性のための十分条件になる．

離散化スキームが単調性をもつためには，離散化式の係数がすべて正である必要がある．中心差分はこの条件を満たさないため，単調でなく，有界でもない．1 次精度風

上差分はこの条件を満たし，単調で有界である．一般に，単純な高次精度差分スキームは単調でない．

3.2 緩和修正法

高次精度差分スキームで有界性を確保するための方法として，緩和修正法 (deferred correction) がある．これは反復計算を行う場合に，スキームの一部をソース項に移動して計算を次の反復に遅らせて (deferred)，係数が正になるようにする．

時間について陰解法を用いた移流方程式の離散化を考える．

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (52)$$

格子界面の値について，1次風上差分による値を ϕ_{UD} ，中心差分による値を ϕ_{CD} とすると，中心差分による格子界面の値は次式で表すことができる．

$$\phi_{i+1/2} = \phi_{UD} + (\phi_{CD} - \phi_{UD}) \quad (53)$$

整理すると次式になる．

$$\phi_{i+1/2} = \phi_i + \frac{1}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (54)$$

たとえば，第2項を陽的に扱う．

これより，移流方程式の離散化式は次のようになる．

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c(\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}) - \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (55)$$

さらに整理して

$$(1+c)\phi_i^{n+1} = c\phi_{i-1}^{n+1} + \left\{ \phi_i^n - \frac{1}{2}c(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \right\} \quad (56)$$

これで $n+1$ についての係数はすべて正になる．

3.3 高解像度スキーム

移流をきれいに解きたい場合，高解像度のスキームが必要になる．まず高精度なものが必要になるが，一般に高次精度差分スキームは解に振動を生じる．一方で振動を抑えられる1次精度風上差分では解が減衰してしまう．では，この両者を組み合わせたらどうか．一定の割合で混合するのではなく，必要に応じて両者を切り替えれば，平均的に高精度で有界なスキームを構成できる．

このような考えのもとに構成されたものとして，TVDスキームやNVDスキームがある．以下ではTVDスキームとNVDスキームについてそれぞれ述べる．

3.4 TVD スキーム

TVD スキーム [5] [6] は, 単調性を保つために全変動 (Total Variation: TV) という量を用いる. TV は次式で定義される.

$$\text{TV}(\phi^n) = \sum_i |\phi_{i+1}^n - \phi_i^n| \quad (57)$$

これは隣同士の格子点の値の変化の総和であり, 全体的な値のこぼこ具合を表している. ある形の分布が増減なしで移流するとき, 本来は形を変えないので, 全体的な値のこぼこ具合は変わらないはずであり, 少なくとも増えることはないはずである. したがって, 単調性を維持する条件として以下の条件が考えられる.

$$\text{TV}(\phi^{n+1}) \leq \text{TV}(\phi^n) \quad (58)$$

これを全変動 (Total Variation Diminishing: TVD) 条件という. この条件を満たすスキームを TVD スキームと呼ぶ.

次の形の離散化式を仮定する.

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - C_{i-1/2} \Delta\phi_{i-1/2}^n + D_{i+1/2} \Delta\phi_{i+1/2}^n \quad (59)$$

ここで $\Delta\phi_{i+1/2} = \phi_{i+1} - \phi_i$ である. ϕ_{i+1}^n から上式を引いて TV を構成すると次式になる.

$$\begin{aligned} \sum_i |\Delta\phi_{i+1/2}^{n+1}| &= \sum_i (1 - C_{i+1/2} - D_{i+1/2}) |\Delta\phi_{i+1/2}^n| + \\ &\quad \sum_i C_{i-1/2} |\Delta\phi_{i-1/2}^n| + \sum_i D_{i+3/2} |\Delta\phi_{i+3/2}^n| \end{aligned} \quad (60)$$

TVD 条件から以下が得られる.

$$C_{i+1/2} \geq 0, \quad D_{i+1/2} \geq 0, \quad 0 \leq C_{i+1/2} + D_{i+1/2} \leq 1 \quad (61)$$

格子界面の値について, 1 次風上差分による値を ϕ_{UD} , 中心差分による値を ϕ_{CD} とし, 次式のように構成する.

$$\phi_{i+1/2} = \phi_{UD} + \psi(\phi_{CD} - \phi_{UD}) \quad (62)$$

整理すると次式になる.

$$\phi_{i+1/2} = \phi_i + \frac{1}{2} \psi(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (63)$$

ここで ψ はスキームを調整する関数で, 流束制限関数 (flux limiter function) と呼ばれる. これを何の関数にするかが問題だが, ここでは, 解の振動を抑えつつ減衰も抑えたい. 解の変化が大きいところだけで減衰が効けばよいので, 解の変化を検出できればよい. 解の変化の大きさを測るパラメタとして, 次の連続する格子点の値の変化の比 (consecutive gradient) r_i を考える.

$$r_i = \frac{\Delta\phi_{i-1/2}}{\Delta\phi_{i+1/2}} \quad (64)$$

ψ はこの r_i の関数とする .

スキームが TVD 条件を満たすための $\psi(r)$ の条件を求める . 式 (63) を用いて移流方程式を離散化すると次式のようになる .

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c\Delta\phi_{i-1/2}^n - \frac{1}{2}c(\psi(r_i)\Delta\phi_{i+1/2}^n - \psi(r_{i-1})\Delta\phi_{i-1/2}^n) \quad (65)$$

式 (59) と比較して , 次式を得る .

$$C_{i-1/2} = c + \frac{1}{2}c \frac{\psi(r_i)\Delta\phi_{i+1/2}^n - \psi(r_{i-1})\Delta\phi_{i-1/2}^n}{\Delta\phi_{i-1/2}^n} \quad (66)$$

ここで $D_{i+1/2} = 0$ とした . $C_{i-1/2}$ は次のように表される .

$$C_{i-1/2} = c\left\{1 + \frac{1}{2}(\psi(r_i)/r_i - \psi(r_{i-1}))\right\} \quad (67)$$

$C_{i-1/2}$ の範囲は次のようになる .

$$c\left(1 - \frac{1}{2}\Phi\right) \leq C_{i-1/2} \leq c\left(1 + \frac{1}{2}\Phi\right) \quad (68)$$

ここで

$$|\psi(r_i)/r_i - \psi(r_{i-1})| \leq \Phi \quad (69)$$

式 (61) より

$$|\psi(r_i)/r_i - \psi(r_{i-1})| \leq 2 \quad (70)$$

これより以下を得る .

$$\psi(r)/r \leq 2, \quad \psi(r) \leq 2 \quad (71)$$

最後に $r \leq 0$ のとき $\psi(r) = 0$ という条件を加えて整理すると , スキームが TVD 条件を満たすための $\psi(r)$ の条件は以下のようになる .

$$\begin{cases} \psi(r) = 0 & (r \leq 0) \\ \psi(r) \leq 2r & (0 < r < 1) \\ \psi(r) \leq 2 & (r \geq 1) \end{cases} \quad (72)$$

Sweby [6] は制限関数につぎの対称性 (symmetry property) を要請している .

$$\psi(r)/r = \psi(1/r) \quad (73)$$

格子点 i について $\phi_{i+1/2}$, $\phi_{i-1/2}$ を表すと次のようになる .

$$\begin{aligned} \phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{1}{2}\psi(r_i)(\phi_{i+1} - \phi_i) \\ \phi_{i-1/2} &= \phi_{i-1} + \frac{1}{2}\psi(1/r_i)(\phi_i - \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (74)$$

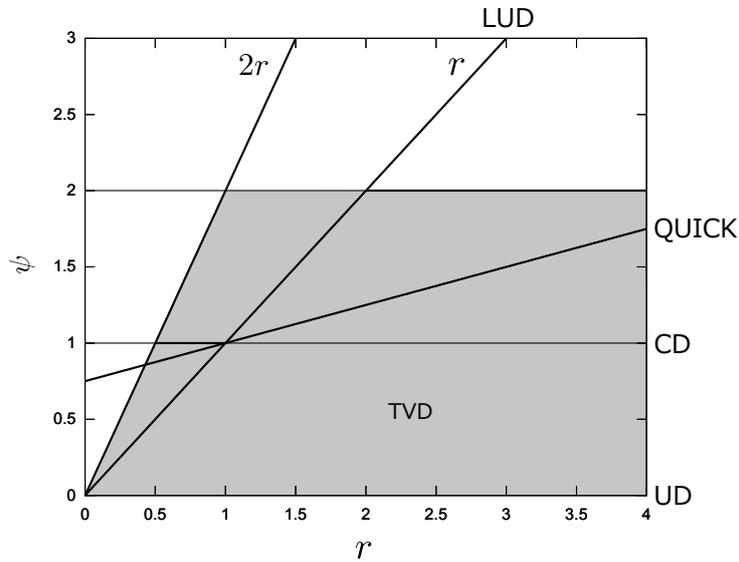


図 3: TVD 条件 (UD : 1 次精度風上差分 , CD : 中心差分 , LUD : 2 次精度風上差分)

もし制限関数が対称であれば

$$\begin{aligned}\phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{1}{2}\psi(r_i)(\phi_{i+1} - \phi_i) \\ \phi_{i-1/2} &= \phi_{i-1} + \frac{1}{2}\psi(r_i)(\phi_{i+1} - \phi_i)\end{aligned}\tag{75}$$

となり、右辺第 2 項を同じ方法で扱うことができる。

1 次精度風上差分、中心差分、2 次精度風上差分、QUICK をそれぞれ制限関数の形で表すと、以下のようなになる。

1 次精度風上差分

$$\psi(r) = 0\tag{76}$$

中心差分

$$\psi(r) = 1\tag{77}$$

2 次精度風上差分

$$\psi(r) = r\tag{78}$$

QUICK

$$\psi(r) = \frac{3+r}{4}\tag{79}$$

1 次精度風上差分は TVD 条件を満たすが、中心差分、2 次精度風上差分、QUICK は部分的にしか満たさない(図 3)。2 次精度風上差分と QUICK は対称でない。

任意の 2 次精度差分スキームを中心差分と 2 次精度風上差分の混合で表すと、2 次精度 TVD スキームの領域を限定することができる。

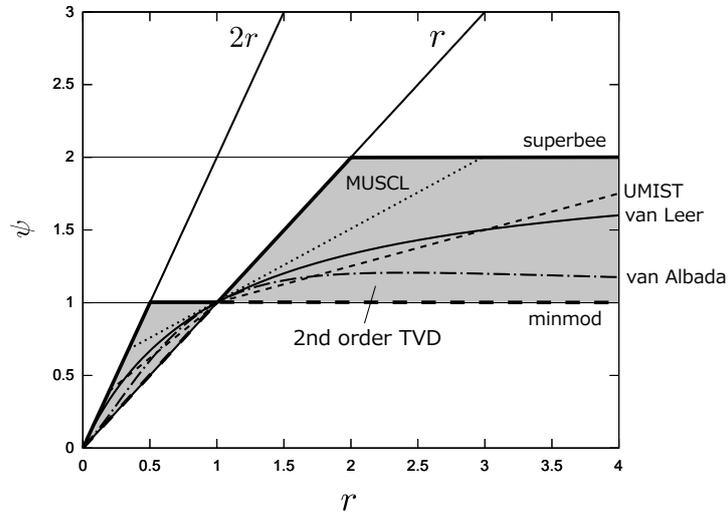


図 4: 2 次精度 TVD スキーム

さまざまな制限関数が提案されている．以下に代表的なものを挙げる [7]．

minmod

$$\psi(r) = \max(0, \min(r, 1)) \quad (80)$$

superbee

$$\psi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) \quad (81)$$

van Leer

$$\psi(r) = \frac{r + |r|}{1 + r} \quad (82)$$

van Albada

$$\psi(r) = \frac{r + r^2}{1 + r^2} \quad (83)$$

UMIST

$$\psi(r) = \max(0, \min(2r, (1 + 3r)/4, (3 + r)/4, 2)) \quad (84)$$

MUSCL [8]

$$\psi(r) = \max(0, \min(2r, (1 + r)/2, 2)) \quad (85)$$

ここで $\min(a, b, \dots)$ は引数のうちで最小の値を取り， $\max(a, b, \dots)$ は引数のうちで最大の値を取る．上記はすべて TVD 条件を満たし，対称で，2 次精度である (図 4)．minmod は 2 次精度領域の下限を与え，superbee は上限を与える．UMIST は QUICK を TVD 条件を満たし対称にしたものである．

3.5 NVD スキーム

NVD (Normalized Variable Diagram) [10] は、注目格子点の両隣の格子点のあいだで変数を正規化してスキームを構成する考え方である。変数 ϕ をつぎのように正規化する。

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} \quad (86)$$

$\phi = \phi_{i-1}$ のとき $\tilde{\phi} = 0$, $\phi = \phi_{i+1}$ のとき $\tilde{\phi} = 1$ である。

これを用いて、1次精度風上差分、中心差分、2次精度風上差分、QUICK はそれぞれ次のように表される。

1次精度風上差分

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \tilde{\phi}_i \quad (87)$$

中心差分

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\tilde{\phi}_i + \frac{1}{2} \quad (88)$$

2次精度風上差分

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_i \quad (89)$$

QUICK

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_i + \frac{3}{8} \quad (90)$$

NVD において、有界性の基準として、対流有界性基準 (CBC: Convection Bound-
edness Criterion) と呼ばれる以下の基準が使われる。

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_i \leq \tilde{\phi}_{i+1/2} \leq 1 & (0 < \tilde{\phi}_i < 1) \\ \tilde{\phi}_{i+1/2} = \tilde{\phi}_i & (\tilde{\phi}_i \leq 0, \tilde{\phi}_i \geq 1) \end{cases} \quad (91)$$

要するに、値が $\phi_{i-1} < \phi_i < \phi_{i+1/2} < \phi_{i+1}$ となるようにしておき、それを破るときには1次風上差分を使うようにすれば有界性を確保できるだろう、ということである。1次精度風上差分はこの基準を満たすが、中心差分、2次精度風上差分、QUICK は部分的にしか満たさない(図5)。

CBC を満たすスキームを構成する単純な方法は、 $\tilde{\phi}_i$ の途中で中心差分と2次精度風上差分を切り替えるものである。両者は $\tilde{\phi}_i = 1/2$ で交わるので、つぎのようにすればよい。

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{3}{2}\tilde{\phi}_i & (0 < \tilde{\phi}_i \leq 1/2) \\ \frac{1}{2}\tilde{\phi}_i + \frac{1}{2} & (1/2 < \tilde{\phi}_i < 1) \\ \tilde{\phi}_i & (\tilde{\phi}_i \leq 0, \tilde{\phi}_i \geq 1) \end{cases} \quad (92)$$

任意の2次精度差分スキームを中心差分と2次精度風上差分の混合で表すと、2次精度 NVD スキームの領域を限定することができる。上記のスキームは2次精度領域の下限に当たる。

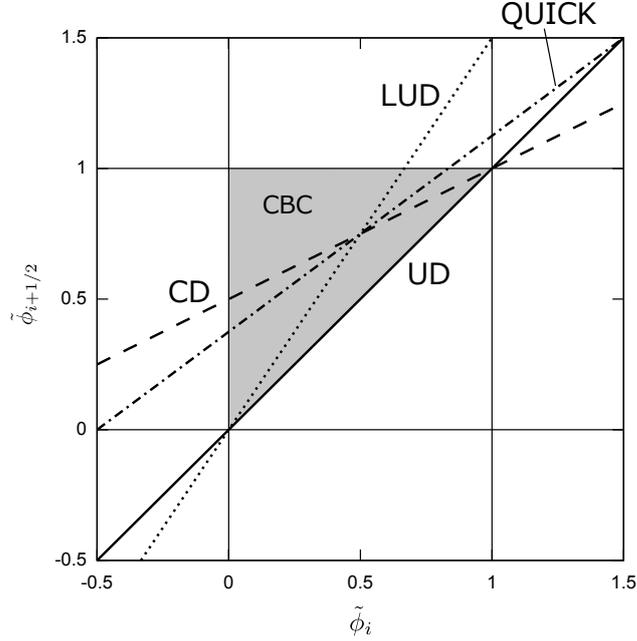


図 5: NVD における有界性基準

NVD の考え方で構成されたスキームのひとつに、以下の Gamma スキーム [11] がある。

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} = \begin{cases} -\frac{\tilde{\phi}_i^2}{2\beta_m} + \left(1 + \frac{1}{2\beta_m}\right) \tilde{\phi}_i & (0 < \tilde{\phi}_i \leq \beta_m) \\ \frac{1}{2}\tilde{\phi}_i + \frac{1}{2} & (\beta_m < \tilde{\phi}_i < 1) \\ \tilde{\phi}_i & (\tilde{\phi}_i \leq 0, \tilde{\phi}_i \geq 1) \end{cases} \quad (93)$$

ここで β_m はパラメタで、 $1/10 \leq \beta_m \leq 1/2$ である。このスキームは 2 次精度である (図 6)。

正規化しているのに、最後にもとに戻す必要がある。1 次精度風上差分と中心差分を組み合わせると、次式になる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{i+1/2} &= \tilde{\phi}_{UD} + \gamma(\tilde{\phi}_{CD} - \tilde{\phi}_{UD}) \\ &= \tilde{\phi}_i + \frac{1}{2}\gamma(1 - \tilde{\phi}_i) \\ \phi_{i+1/2} &= \phi_i + \frac{1}{2}\gamma(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \end{aligned} \quad (94)$$

ここで γ は $\tilde{\phi}_i$ を変数とした流束制限関数に当たる。 r_i と $\tilde{\phi}_i$ は次式の関係にある。

$$r_i = \frac{\tilde{\phi}_i}{1 - \tilde{\phi}_i} \quad (95)$$

CBC を満たすように中心差分と 2 次精度風上差分で単純に組み合わせで作ったス

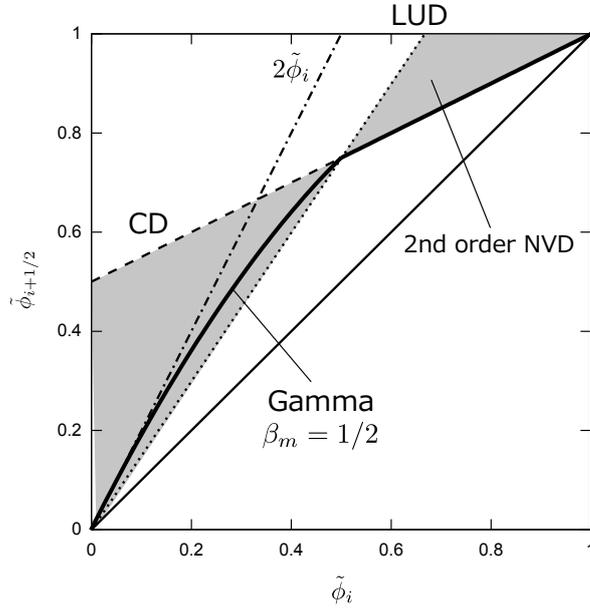


図 6: Gamma スキーム

キームの場合, γ は次式になる .

$$\gamma = \max(0, \max(\tilde{\phi}_i / (1 - \tilde{\phi}_i), 1)) \quad (96)$$

これは TVD スキームの minmod 制限関数に当たる .

Gamma スキームの場合, γ は次式になる .

$$\gamma = \max(0, \max(\tilde{\phi}_i / \beta_m, 1)) \quad (97)$$

CBC を満たす γ (つまり ψ) の条件は, 以下ようになる .

$$0 \leq \gamma \leq 2 \quad (98)$$

これは TVD 条件より制限が緩い . TVD 条件の $\psi(r)/r \leq 2$ を考えると, 以下の条件が得られる .

$$\tilde{\phi}_{i+1/2} \leq 2\tilde{\phi}_i \quad (99)$$

これより, Gamma スキームの $\tilde{\phi}_i = 0$ における傾き $d\tilde{\phi}_{i+1/2}/d\tilde{\phi}_i$ を考えると, Gamma スキームが TVD 条件を満たすのは $\beta_m = \frac{1}{2}$ のときであることがわかる .

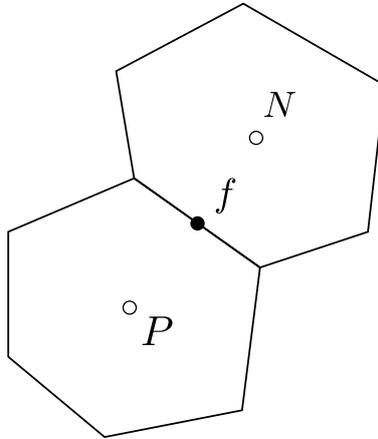


図 7: セル

4 有限体積法における離散化スキーム

4.1 有限体積法における離散化スキーム

これまでは差分法の離散化スキームについて考えてきたが，ここでは有限体積法における離散化スキームについて考える．有限体積法ではセルの面の値を補間する必要があり，これまで述べてきた格子界面の値の考え方をを使うことができる．以下では，3次元の非構造メッシュを想定し，注目セル，隣接セル，注目セルと隣接セルに挟まれた面をそれぞれ P, N, f で表し，それぞれの中心位置を x_P, x_N, x_f ，それぞれの位置での値を ϕ_P, ϕ_N, ϕ_f などと表す (図 7)．

4.2 中心差分

有限体積法において差分法の中心差分に当たるものは，次の線形補間である．

$$\phi_f = w\phi_P + (1-w)\phi_N \quad (100)$$

ここで w は重みで， Nf 間の距離と PN 間の距離の比で表される．

$$w = \frac{|x_f - x_N|}{|x_N - x_P|} \quad (101)$$

4.3 1次精度風上差分

1次精度風上差分では，面中心の値を風上側からもってくる．

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f > 0) \\ \phi_N & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f < 0) \end{cases} \quad (102)$$

ここで \mathbf{S}_f は面の法線方向ベクトルである．

4.4 線形風上差分

線形風上差分は次式のように表現できる．

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P + (\nabla\phi)_P \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P) & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f > 0) \\ \phi_N + (\nabla\phi)_N \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_N) & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f < 0) \end{cases} \quad (103)$$

4.5 TVD・NVD スキーム

TVD・NVD スキームは，1 次風上差分による値を ϕ_{UD} ，中心差分による値を ϕ_{CD} とすると，以下のように表される．

$$\phi_f = \phi_{UD} + \psi(\phi_{CD} - \phi_{UD}) \quad (104)$$

これより

$$\phi_f = \begin{cases} \{1 - \psi(1 - w)\}\phi_P + \psi(1 - w)\phi_N & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f > 0) \\ \psi w\phi_P + (1 - \psi w)\phi_N & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f < 0) \end{cases} \quad (105)$$

これは次のようにも書ける．

$$\begin{aligned} \phi_f &= w_p\phi_P + (1 - w_p)\phi_N \\ w_p &= \begin{cases} \psi w + (1 - \psi) & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f > 0) \\ \psi w & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (106)$$

流束制限関数については，TVD・NVD それぞれの関数を使えばよい． r ， $\tilde{\phi}$ の計算には格子点が 3 つ必要になるが，非構造メッシュでは一般に面を挟んだ 2 つのセル値を考え，3 つのセル値は扱いにくいいため，計算には工夫が必要である．ここで r_i ， $\tilde{\phi}_i$ に対応するものを，面で計算される値として r_f ， $(\tilde{\phi}_P)_f$ と表す．

r_i は次のように表すことができる [9]．

$$r_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1} - (\phi_{i+1} - \phi_i)}{\phi_{i+1} - \phi_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i} - 1 \quad (107)$$

ここで $\phi_{i+1} - \phi_{i-1}$ を次のように表す．

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = \frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x_{i+1} - x_{i-1}) = 2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) \quad (108)$$

したがって

$$r_i = \frac{2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x_{i+1} - x_i)}{\phi_{i+1} - \phi_i} - 1 \quad (109)$$

これより， $\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f > 0$ のとき r_f を次式で計算する．

$$r_f = \frac{2(\nabla\phi)_P \cdot (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P)}{\phi_N - \phi_P} - 1 \quad (110)$$

$u \cdot S_f < 0$ のときは, $1/r_{i+1}$ から次式が得られる .

$$r_f = \frac{2(\nabla\phi)_N \cdot (x_N - x_P)}{\phi_N - \phi_P} - 1 \quad (111)$$

つまり, 流れの方向に応じて勾配だけを切り替えればよい .

$\tilde{\phi}_i$ も同様に,

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1} - (\phi_{i+1} - \phi_i)}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} = 1 - \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (x_{i+1} - x_i)} \quad (112)$$

これより, $u \cdot S_f > 0$ のとき $(\tilde{\phi}_P)_f$ を次式で計算する .

$$(\tilde{\phi}_P)_f = 1 - \frac{\phi_N - \phi_P}{2(\nabla\phi)_P \cdot (x_N - x_P)} \quad (113)$$

$u \cdot S_f < 0$ のときは

$$\tilde{\phi}_{i+1} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i+2}}{\phi_i - \phi_{i+2}} = \frac{\phi_i - \phi_{i+2} - (\phi_i - \phi_{i+1})}{\phi_i - \phi_{i+2}} = 1 - \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} (x_{i+1} - x_i)} \quad (114)$$

したがって

$$(\tilde{\phi}_P)_f = 1 - \frac{\phi_N - \phi_P}{2(\nabla\phi)_N \cdot (x_N - x_P)} \quad (115)$$

これもまた, 流れの方向に応じて勾配を切り替えればよい .

もし TVD でも NVD でもないスキームをこの枠組みで実装したい場合は, 制限関数を次のように定義すればよい .

$$\psi = \frac{\phi_f - \phi_{UD}}{\phi_{CD} - \phi_{UD}} \quad (116)$$

4.6 勾配制限

線形風上差分では勾配を用いるが, 数値的な振動を抑えるために勾配制限 (gradient limiter あるいは slope limiter) が使われる . 勾配制限として Barth and Jespersen スキーム [9] が使われる . このスキームは TVD スキーム同様に流束制限を行うもので, ϕ_f が次式を満たすようにする .

$$\min(\phi_P, \phi_N) \leq \phi_f \leq \max(\phi_P, \phi_N) \quad (117)$$

ϕ_f は線形補間の形で表す .

$$\phi_f = \phi_P + \psi_f (\nabla\phi)_P \cdot (x_f - x_P) \quad (118)$$

ここで ψ_f は次式で表される制限関数である .

$$\psi_f = \begin{cases} \min\left(\frac{\max(\phi_P, \phi_N) - \phi_P}{(\nabla\phi)_P \cdot (x_f - x_P)}, 1\right) & \phi_f > \phi_P \\ \min\left(\frac{\min(\phi_P, \phi_N) - \phi_P}{(\nabla\phi)_P \cdot (x_f - x_P)}, 1\right) & \phi_f < \phi_P \\ 1 & \phi_f = \phi_P \end{cases} \quad (119)$$

この制限関数を用いて勾配を制限する .

5 各種スキームの比較

各種スキームの挙動の違いを見るために、1次元スカラー輸送問題で比較する。初期値を0とし、左端のスカラー値を1に設定、左から右に向かって流れを作る。範囲は $0 \leq x \leq 1$ で、スカラーの前面が領域の中央 ($x = 0.5$) に来る時刻におけるスカラーの分布形状を比較する。

1次精度風上差分 (UD)、中心差分 (CD)、2次精度風上差分 (LUD)、勾配制限付き2次精度風上差分 (LUD with limiter)、QUICK の比較を図8に、その表示範囲を絞ったものを図9に示す。

まず、中心差分の結果が激しく振動しているのが目につく。一方で、1次精度風上差分の結果がかなりなまっているのがわかる。QUICK の解の勾配がもっとも急であり数値拡散が小さいと見えるが、上部が飛び出してしまっている (オーバーシュート)。2次精度風上差分は1次精度風上差分よりはずっと数値拡散の小さな結果になっているが、下部が飛び出してしまっている (アンダーシュート)。しかし、勾配制限を用いたほうについてはアンダーシュートが抑えられている。

つぎに、各種2次精度 TVD スキームおよび勾配制限付き2次精度風上差分の比較を図10に示す。すべてのスキームの結果が minmod と superbee の間に収まっている。minmod と superbee 以外のスキームの挙動には大差なく、どれを選択するかは好みの問題となる。また、勾配制限付き2次精度風上差分の性能は2次精度 TVD スキームと同等であることがわかる。

最後に、Gamma スキームの結果を図11に示す。合わせて minmod、superbee の結果を載せているが、 $\beta_m = 1/2$ の場合、Gamma スキームは2次精度 TVD に近い挙動を示している。 β_m が小さくなると解の勾配がより急になっている。

さて、以上の結果から、どのスキームを使うべきと言えるだろうか？精度の面では数値拡散が小さいものを選ぶべきだが、数値拡散が小さいと計算の安定性が損なわれるため、計算を実行できない場合がある。一方、数値拡散が大きなものを選ぶと精度が損なわれるが、安定して計算できる可能性がある。つまり、解きたい問題の求める精度と計算の安定性に応じて適切なスキームを選ぶことになる。また、いまひとつの観点に解の有界性がある。温度や濃度などオーバーシュート・アンダーシュートが起こると物理的に問題が生じる場合は、勾配制限付き2次精度風上差分か TVD スキームを用いるべきである。その中からどれを選ぶべきかは、上述の通り好みの問題である。

参考文献

- [1] 峯村吉泰：Java による流体・熱流動の数値シミュレーション，森北出版 (2001)。
- [2] B. P. Leonard：A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation，Comput. Methods Appl. Mech. Eng.，19，59-98 (1979)。
- [3] 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会 (1994)。

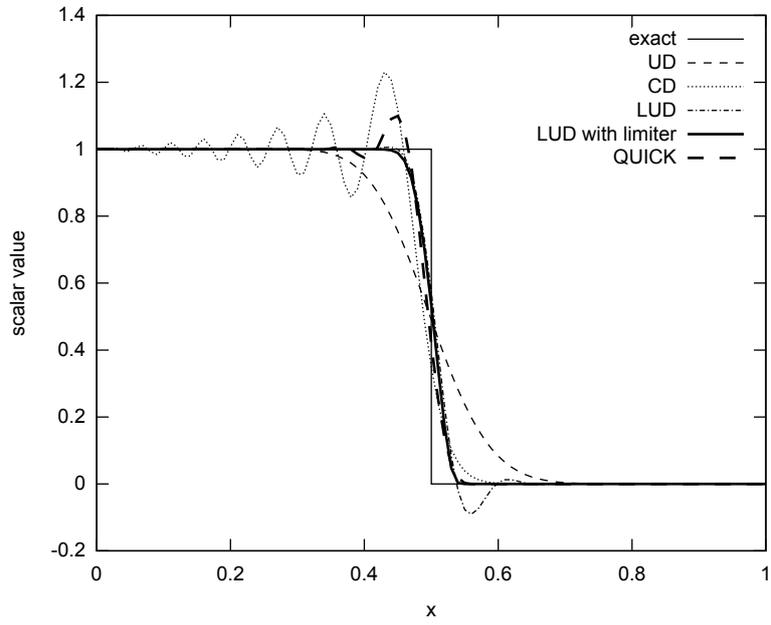


図 8: 1次元スカラー輸送問題におけるスキームの比較 1

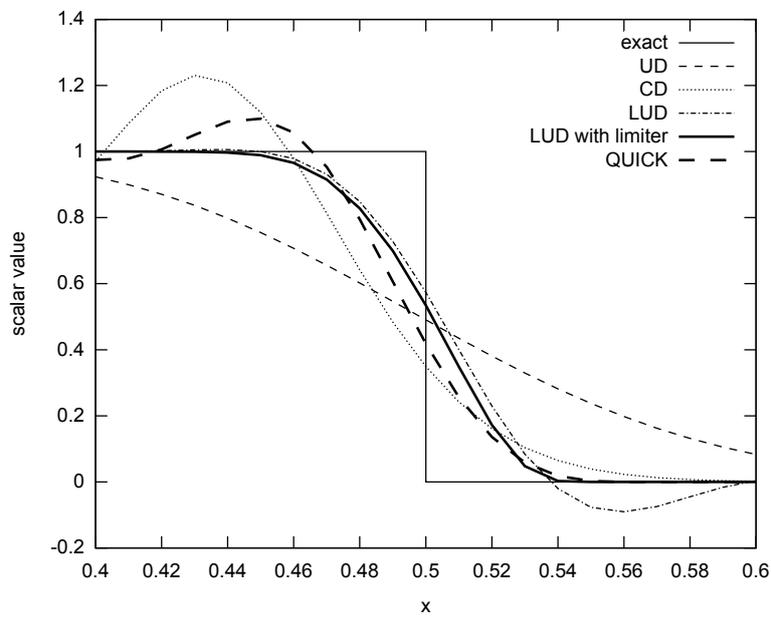


図 9: 1次元スカラー輸送問題におけるスキームの比較 2

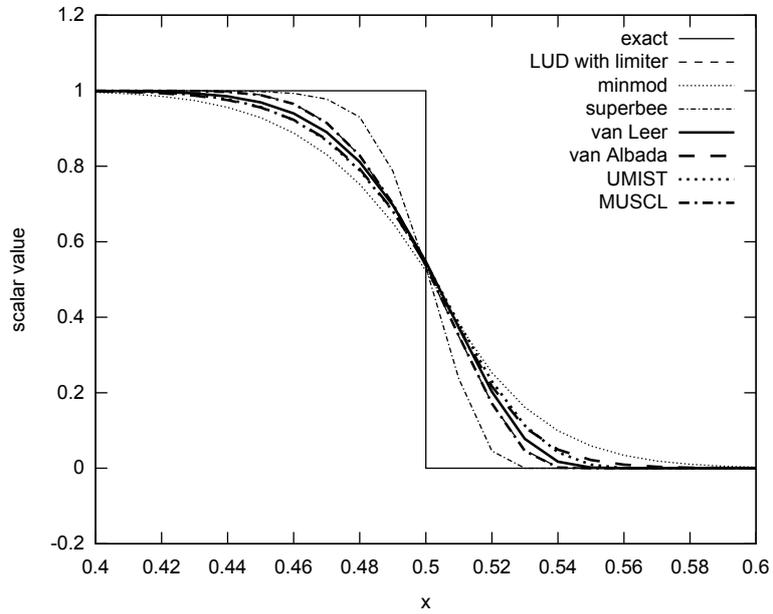


図 10: 1次元スカラー輸送問題におけるスキームの比較 3

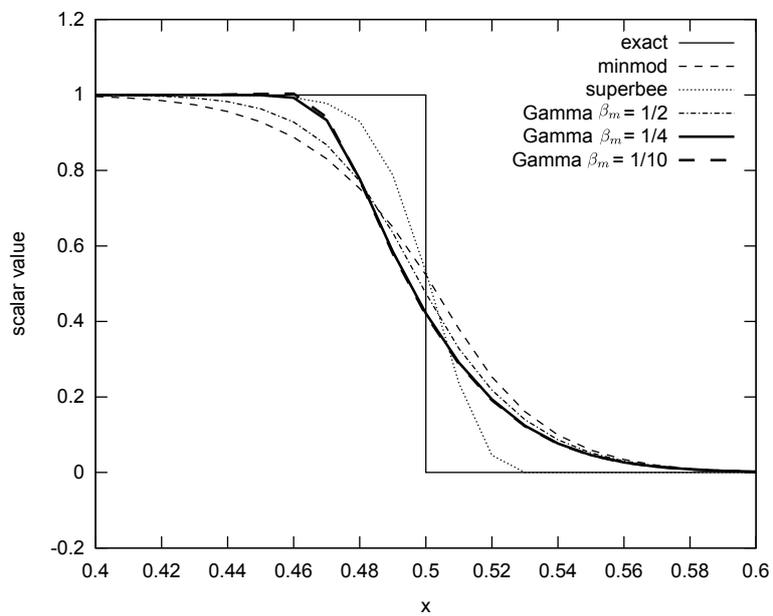


図 11: 1次元スカラー輸送問題におけるスキームの比較 4

- [4] S・V・パタンカー：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版(1985)。
- [5] A. Harten: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws , J. Comp. Phys. , 49 , 357-393 (1983) .
- [6] P. K. Sweby : High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws , SIAM J. Numer. Anal. , 21 , 995-1011 (1984) .
- [7] H. K. Versteeg , W. Malalasekera : 数値流体力学 [第 2 版] , 森北出版 (2011) .
- [8] B. van Leer : Towards the ultimate conservative difference scheme IV : A new approach to numerical convection , J. Comput. Phys. 23 , 276-299 (1977) .
- [9] M. S. Darwish , F. Moukalled : TVD schemes for unstructured grids , Int. J. Heat and Mass Trans. , 46 , 599-611 (2003) .
- [10] B. P. Leonard : Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities , Int. J. Numer. Methods Fluids , 8 , 1291-1318 (1988) .
- [11] H. Jasak , H. Weller , A. Gosman : High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes , Int. J. Numer. Methods Fluids , 31 , 431-449 (1999) .