

# 乱流モデル

春日 悠

2018年11月2日

## 目次

1	層流と乱流	2
2	レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式	2
2.1	レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式	2
2.2	レイノルズ応力輸送方程式	4
2.3	乱流エネルギー輸送方程式	6
2.4	運動エネルギー輸送方程式	7
3	乱流の構造	8
3.1	エネルギーカスケード	8
3.2	乱流の普遍的性質	10
4	乱流モデル	13
4.1	渦の散逸スケール	13
4.2	乱流モデル	14
4.3	渦粘性モデル	14
4.4	混合長モデル	15
4.5	1方程式モデル	15
4.6	標準 $k-\varepsilon$ モデル	17
4.7	境界層の取り扱い	18
4.7.1	境界層	18
4.7.2	壁法則	19
4.7.3	壁関数	21
4.7.4	粗い壁の場合	23
4.7.5	温度と物質濃度の壁関数	24
4.8	その他の渦粘性モデル	26
4.8.1	低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル	26
4.8.2	RNG $k-\varepsilon$ モデル	29
4.8.3	Realizable $k-\varepsilon$ モデル	30

4.8.4 $k-\omega$ モデル	31
4.8.5 非線形 $k-\varepsilon$ モデル	33
4.9 レイノルズ応力輸送モデル	33

## 1 層流と乱流

水道の蛇口を少しだけ開くと、なめらかな水の筋ができる。蛇口を大きく開いていくと、表面の荒れた流れになる。あるいは、たばこや線香から立ち上る煙は、周りの空気を動かさないようにそっとしておけば、真上に向かってきれいな層を作る。周りの空気を動かすと、煙は無数の渦を作り、複雑な模様を描く。落ち着いていてきれいな様相を示す流れを層流 (laminar flow) といい、乱れて複雑な様相を示す流れを乱流 (turbulence) という。

層流と乱流を区別するパラメータとして、レイノルズ数 (Reynolds number) がある。レイノルズ数  $Re$  は、代表速度を  $U$ 、代表長さを  $L$ 、流体の密度を  $\rho$ 、粘性係数を  $\mu$ 、動粘性係数を  $\nu$  とすると、次式で定義される。

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

流速を大きくしていくとレイノルズ数は大きくなっていき、あるところで乱流状態になる。乱流状態になるときのレイノルズ数を、臨界レイノルズ数という。臨界レイノルズ数の値は流れによるが、一般的にレイノルズ数が 1000 のオーダー以上であれば乱流と見なすことができる。

## 2 レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式

### 2.1 レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式

乱流は、大小の渦 (eddy) の非定常的な生成・消滅が生じる複雑な流れであるが、エンジニアリングにおいて興味があるのは、その平均的な挙動である。そのため、乱流の情報を得るために、乱流の支配方程式に対して平均化が施される。

乱流の挙動はきわめて複雑であるが、近年の数値計算による検証により、乱流現象も層流と同様にナビエ・ストークス方程式で表現できると考えられている。非圧縮性流体を考えると、ナビエ・ストークス方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\nu D) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は速度、 $p$  は密度で割られた圧力である。 $D$  は速度勾配の対称部分で、次式で表される。

$$D = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right\} \quad (3)$$

また，連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

さて，ナビエ・ストークス方程式の平均化を考える．平均化の方法として，時間平均やアンサンブル平均（個数平均）などが考えられる．ここではアンサンブル平均を考える．速度  $\mathbf{u}$  の平均  $\bar{\mathbf{u}}$  を次式で定義する．

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \quad (5)$$

ここで  $n$  は個数である． $n$  回実験を行い，その平均をとるイメージである．速度  $\mathbf{u}$  は平均  $\bar{\mathbf{u}}$  と変動成分  $\mathbf{u}'$  に分けられる．

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (6)$$

これをレイノルズ分解という．アンサンブル平均にはつぎのような性質がある．

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{u}}} &= \bar{\mathbf{u}} \\ \overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} &= \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}} &= \overline{\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}'} = \overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}} = \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = 0 \\ \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} &\neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

このような性質をもつ平均をレイノルズ平均 (Reynolds averaging) という．

連続の式の平均化を考える．レイノルズ分解により

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (8)$$

これにレイノルズ平均を適用すると

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (9)$$

これより次式を得る．

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (10)$$

ナビエ・ストークス方程式の平均化を考える．まず，ナビエ・ストークス方程式にレイノルズ分解を適用する．

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'\mathbf{u}') = -\nabla p - \nabla p' + \nabla \cdot (2\nu D) + \nabla \cdot (2\nu \bar{D}) \quad (11)$$

両辺にレイノルズ平均を適用すると，次式を得る．

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (2\nu \bar{D} - \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \quad (12)$$

もとの式と比較すると，速度が平均速度に置き換わったのに加え， $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$  の項が加わった形になっている．この項は密度をかけると応力の単位になるため，レイノルズ応力 (Reynolds stress) と呼ばれる．また，2つの速度の変動成分の積の形をしているので，2次相関，2重相関，2次モーメントなどと呼ばれる．レイノルズ平均化されたナビエ・ストークス方程式のことを，レイノルズ平均ナビエ・ストークス (Reynolds-Averaged Navier-Stokes: RANS) 方程式という．

## 2.2 レイノルズ応力輸送方程式

レイノルズ応力が不明なため，レイノルズ応力の輸送方程式を求めてみる．式 (11) と式 (12) の差をとると，次式を得る．

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \nabla \cdot (u' \bar{u}) = -\nabla p' + \nabla \cdot (2\nu D' + \overline{u'u'} - \bar{u}u' - u'u') \quad (13)$$

これを添字表記で表すと

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i \bar{u}_k) = -\frac{\partial}{\partial x_i} p' + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{ik} + \overline{u'_i u'_k} - \bar{u}_i u'_k - u'_i \bar{u}_k) \quad (14)$$

これより， $u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}$  を構成すると

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} &= -u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j \bar{u}_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i \bar{u}_k) \\ &\quad - u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ &\quad + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{jk}) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{ik}) \\ &\quad + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_j u'_k}) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_k}) \\ &\quad - u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_j u'_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i u'_k) \\ &\quad - u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j \bar{u}_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i \bar{u}_k) \end{aligned} \quad (15)$$

左右それぞれの項を2つずつ変形する．まず，左辺は

$$u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (u'_i u'_j) \quad (16)$$

右辺1行目は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j \bar{u}_k) &= u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j \bar{u}_k) + u'_j \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j \bar{u}_k) &= u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i \bar{u}_k) + u'_i \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j \bar{u}_k) &= u'_j \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (17)$$

より

$$-u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j \bar{u}_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i \bar{u}_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j \bar{u}_k) \quad (18)$$

右辺2行目は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i p') &= \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} p' + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_j p') &= \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} p' + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (19)$$

より

$$-u_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} = p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} (p' u'_i \delta_{jk} + p' u'_j \delta_{ik}) \quad (20)$$

ここで,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (21)$$

である.

右辺 3 行目は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu u'_i D'_{jk}) &= \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} 2\nu D'_{jk} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{jk}) \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu u'_j D'_{ik}) &= \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} 2\nu D'_{ik} + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{ik}) \end{aligned} \quad (22)$$

より

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{jk}) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{ik}) &= \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu u'_i D'_{jk} + 2\nu u'_j D'_{ik}) - 2\nu D'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - 2\nu D'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (23)$$

さらに

$$\begin{aligned} \nu \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} &= \nu \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \\ \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} &= \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

から

$$u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{jk}) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu D'_{ik}) = -2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j) \quad (25)$$

右辺 4 行目はそのままにしておく. 右辺 5 行目は

$$-u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_j u'_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i u'_k) = -u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (26)$$

右辺 6 行目は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j u'_k) &= \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} u'_j u'_k + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} u'_k + u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \\ &= u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} u'_k + u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} u'_k + u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \\ &= u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j u'_k) + u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_k) \end{aligned} \quad (27)$$

より

$$-u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j u'_k) - u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_j u'_k) \quad (28)$$

以上の変形を考慮して，両辺に対してレイノルズ平均を適用すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (R_{ij} \bar{u}_k) = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (J_{ijk}^T + J_{ijk}^P + J_{ijk}^V) \quad (29)$$

ここで， $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  はレイノルズ応力， $P_{ij}$  は生成項で

$$P_{ij} = -R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (30)$$

$\Pi_{ij}$  は圧力-ひずみ相関項

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \quad (31)$$

$\varepsilon_{ij}$  は散逸項

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (32)$$

$J_{ijk}^T$ ， $J_{ijk}^P$ ， $J_{ijk}^V$  はそれぞれ速度変動，圧力変動，粘性による拡散流束である．

$$\begin{aligned} J_{ijk}^T &= -\overline{u'_i u'_j u'_k} \\ J_{ijk}^P &= -(\overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}}) \\ J_{ijk}^V &= \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (33)$$

2次相関  $\overline{u'_i u'_j}$  を求めるために式 (29) を導いたが，新たに3次相関  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$  の項が現れている．さらに3次相関の方程式を導いても4次相関の項が生じ，どこまでやっても終わらないため，どこかでモデル化を行う必要がある．

### 2.3 乱流エネルギー輸送方程式

乱流エネルギー (turbulent energy) を  $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$  として定義すると，式 (29) の縮約から，次式の乱流エネルギーの輸送方程式が得られる．

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_j^{Tk} + J_j^{Pk} + J_j^{V_k}) \quad (34)$$

ここで， $P_k$  は乱流エネルギー生成項で

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (35)$$

$\varepsilon$  はエネルギー散逸率 (dissipation rate)

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (36)$$

$J_j^{Tk}$ ,  $J_j^{Pk}$ ,  $J_j^{Vk}$  はそれぞれ速度変動, 圧力変動, 粘性による拡散流束で

$$\begin{aligned} J_j^{Tk} &= -\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} \\ J_j^{Pk} &= -\overline{p' u'_j} \\ J_j^{Vk} &= \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (37)$$

式 (34) においては, 式 (29) にあった圧力-ひずみ相関項に関する項が消えている. この項は, 速度変動の大きさには影響せず, 速度変動の各方向成分への分配に寄与する.

## 2.4 運動エネルギー輸送方程式

同様にして, 平均流の運動エネルギーの輸送方程式を求める.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} &= -\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_j \bar{u}_k) - \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{u}_k) \\ &\quad - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \\ &\quad + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \bar{D}_{jk}) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \bar{D}_{ik}) \\ &\quad - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_j u'_k} - \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} \end{aligned} \quad (38)$$

左辺

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i \bar{u}_j) \quad (39)$$

右辺 1 行目

$$-\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_j \bar{u}_k) - \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{u}_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k) \quad (40)$$

右辺 2 行目

$$-\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{p} \bar{u}_i \delta_{jk} + \bar{p} \bar{u}_j \delta_{ik}) \quad (41)$$

右辺 3 行目

$$\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \bar{D}_{jk}) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} (2\nu \bar{D}_{ik}) = -2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i \bar{u}_j) \quad (42)$$

右辺 4 行目は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i \overline{u'_j u'_k}) &= \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_j u'_k}) \\ \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_j \overline{u'_i u'_k}) &= \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_k})\end{aligned}\quad (43)$$

より

$$-\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_j u'_k} - \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} = \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i \overline{u'_j u'_k}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_j \overline{u'_i u'_k}) \quad (44)$$

以上より，次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k) &= \\ \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} & \\ - \frac{\partial}{\partial x_k}(-\bar{u}_i \overline{u'_j u'_k} - \bar{u}_j \overline{u'_i u'_k} - \bar{p} \bar{u}_i \delta_{jk} - \bar{p} \bar{u}_j \delta_{ik} + \nu \bar{u}_i \bar{u}_j) & \\ + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} &\end{aligned}\quad (45)$$

平均流の運動エネルギーを  $K = \bar{u}_i \bar{u}_i / 2$  として，上式の縮約をとると，平均流の運動エネルギーの輸送方程式が得られる．

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K \bar{u}_j}{\partial x_j} = -P_k - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\bar{u}_i R_{ij} - \bar{p} \bar{u}_i \delta_{ij} + \nu K) \quad (46)$$

乱流エネルギー生成項  $P_k$  が，負の符号とともに現れている．上式を領域で積分すると，右辺の拡散項は表面積分に変換できる．これは，領域表面から流入してきたエネルギーが， $P_k$  を通して流れの乱れ成分に伝達されることを意味している．式 (34) によると，乱流エネルギーは，エネルギー散逸率  $\varepsilon$  の形で表された分子粘性の効果により散逸する．したがって，式 (12) においてレイノルズ応力の形で散逸しているように見えるエネルギーは，実際には大きなスケールの流れから小さなスケールの流れに受け渡され，分子粘性によって散逸していることになる．

### 3 乱流の構造

#### 3.1 エネルギーカスケード

乱流の数学的分析においては，一様等方性乱流 (homogeneous isotropic turbulence) が想定される．一様等方性乱流は，平均流からのエネルギー供給がなく，統計量が一律で，乱れが等方的な流れである．速度  $u$  を，次式のようにフーリエ変換により波数空間で表現する (これをフーリエ表現と呼ぶことにする)．

$$u(x, t) = \int u(k, t) \exp(-ik \cdot x) dk \quad (47)$$



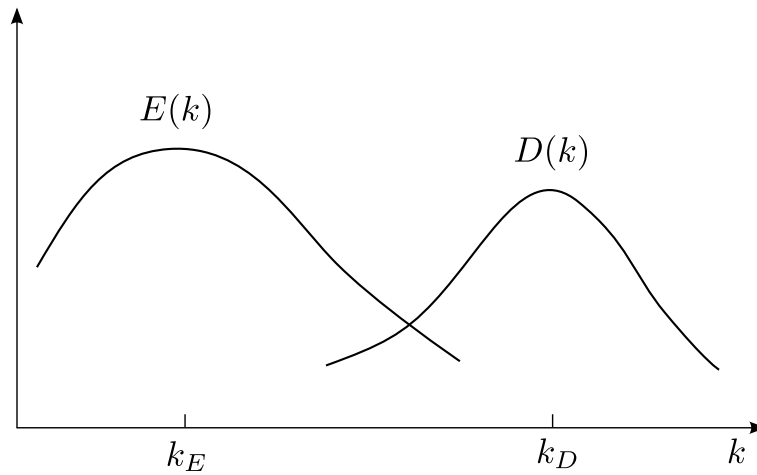


図 1: エネルギースペクトルと散逸スペクトル

ここで、 $k$  は波数である (代わりに、乱流エネルギーを  $K$  で表す)。波数は、渦と関係するものとして考えることができる。低波数は大きな渦、高波数は小さな渦に対応する。一様等方性乱流においては、乱流エネルギーのフーリエ表現は次のようになる。

$$K = \int E(k) dk \quad (48)$$

ここで、 $E(k)$  はエネルギースペクトルと呼ばれ、波数  $k$  と  $k + dk$  の間の乱流エネルギーは  $E(k)dk$  と表される。

エネルギースペクトル  $E(k)$  の支配方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = -D(k) + T(k) \quad (49)$$

ここで、 $D(k)$  は散逸スペクトルと呼ばれるもので

$$\varepsilon = \int D(k) dk \quad (50)$$

と表され

$$D(k) = 2\nu k^2 E(k) \quad (51)$$

で定義される。 $E(k)$  と  $D(k)$  の分布は図 1 のようになる。

一様性のもとでは、乱流エネルギーの輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\varepsilon \quad (52)$$

これは、乱流エネルギーの変化率とエネルギー散逸率が平衡状態にあることを意味している。これより、式 (49) を積分すると、次式を得る。

$$\int T(k) dk = 0 \quad (53)$$

これは、 $T(k)$  がエネルギーの増減に寄与しないことを意味している。 $T(k)$  は、低波数帯から高波数帯にエネルギーを伝達する役割を担い、伝達関数と呼ばれる。

式 (49) を一般化して、流れにエネルギーが供給される場合を考える。低波数帯に供給されるエネルギーを  $W(k)$  とし、定常状態を仮定すると

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = W(k) - D(k) + T(k) = 0 \quad (54)$$

低周波数帯では、 $D(k) \approx 0$  であるので

$$T(k) = -W(k) \quad (55)$$

これは、低波数帯に供給されたエネルギーが高波数帯に伝達されることを意味している。中波数帯においては、 $W(k) \approx 0$ 、 $D(k) \approx 0$  と考えられ

$$T(k) = 0 \quad (56)$$

これは、エネルギーが低波数帯から高波数帯へ、増減なしにそのまま運ばれることを意味している。高波数帯では、 $W(k) \approx 0$  なので

$$T(k) = D(k) \quad (57)$$

これは、低波数帯から運ばれてきたエネルギーが、高波数帯においてすべて散逸することを意味している。式 (54) を積分すると

$$\int W(k) dk = \int D(k) dk = \varepsilon \quad (58)$$

低波数帯で供給されたエネルギーは、中波数帯を素通りして、高波数帯において分子粘性によって散逸する。

上記の結論は、物理的には次のように考えられる。外部からのエネルギーは大きな渦に受け渡される。大きな渦は小さな渦に分裂していき、エネルギーは大きな渦から小さな渦へと受け渡されていく。渦は最終的に分子粘性により消滅し、エネルギーは熱として散逸する。この過程はエネルギーカスケード (energy cascade) と呼ばれる (図 2)。

### 3.2 乱流の普遍的性質

エネルギーカスケードの議論から、波数には、低波数におけるエネルギーを保有した領域 (エネルギー保有領域) と、高波数におけるエネルギーが散逸する領域 (散逸領域) があり、それらの間にエネルギーが通過するのみである領域 (慣性小領域あるいは慣性領域) があると考えられる。エネルギースペクトル  $E(k)$  が最大になる波数を  $k_E$ 、散逸スペクトル  $D(k)$  が最大になる波数を  $k_D$  とし、それぞれをエネルギー保有領域と散逸領域の代表波数とすると、慣性小領域が明確に存在するには、 $k_E$  と  $k_D$  が十分に離れている必要がある (図 1)。すなわち

$$\frac{k_E}{k_D} \ll 1 \quad (59)$$

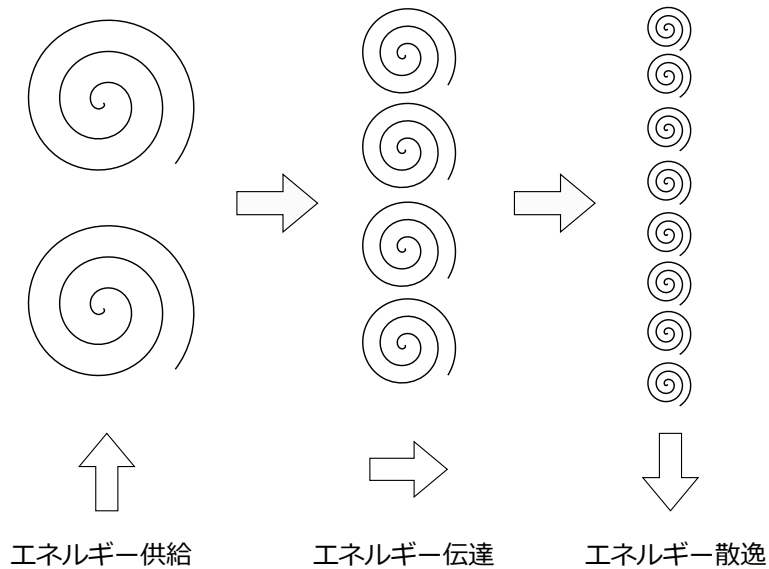


図 2: エネルギーカスケード

エネルギー保有領域におけるエネルギーの減少率は，散逸領域におけるエネルギー散逸率  $\varepsilon$  で表すことができる．また，慣性小領域が明確であれば，この領域では粘性はまだ働かないと考えられる．したがって，慣性小領域におけるエネルギースペクトル  $E(k)$  は，波数  $k$  とエネルギー散逸率  $\varepsilon$  の関数であると考えられ，次元解析により次式で表すことができる．

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (60)$$

これは，コルモゴロフ (Kolmogorov) スペクトル，コルモゴロフの  $-5/3$  乗則，コルモゴロフの相似則 (スケーリング則) などと呼ばれる． $K_0$  はコルモゴロフ定数と呼ばれ，実験により 1.5 程度の値であることが知られている．

以上の議論では，乱流の一様等方性 (および平衡状態) が仮定されているが，一般の流れにおいても，波数が慣性小領域以上の小さな渦では等方性と平衡状態が成り立つと考えられる．すなわち，方向性をもつ平均流から作られる大きな渦は非等方性をもつが，それが引き伸ばされて小さな渦へと分裂していくにつれ，平均流との相関が小さくなり，等方的になっていく．また，小さな渦の時間スケールは，大きな渦のそれと比較してはるかに短く，エネルギー伝達は常に平衡状態にあるとみなすことができる．この考え方は局所等方性 (local isotropic) の仮説と呼ばれている．

慣性小領域は，エネルギー保有領域と散逸領域を部分的に含んでいると考えられ，慣性小領域の極限としてエネルギー保有領域と散逸領域の各種スケールを見積もることができる．まず，エネルギー保有領域側を考える．乱流エネルギーを次式で評価する．

$$K \approx \int_{k_E}^{\infty} E(k) dk = \varepsilon^{2/3} \int_{k_E}^{\infty} k^{-5/3} dk \quad (61)$$

$k_E$  はオーダーとして考え，ここでは係数を無視する．上式より

$$K = \varepsilon^{2/3} k_E^{-2/3} \quad (62)$$

これより， $k_E$  および空間スケール  $\ell_E = 2\pi/k_E$  は

$$\begin{aligned} k_E &= \frac{\varepsilon}{K^{3/2}} \\ \ell_E &= \frac{K^{3/2}}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (63)$$

速度を  $u_E = K^{1/2}$  と考えると，時間スケール  $\tau_E$  は

$$\tau_E = \frac{\ell_E}{u_E} = \frac{K}{\varepsilon} \quad (64)$$

これは，渦の寿命を表していると考えられる．

一方，散逸領域については，エネルギー散逸率を次式で評価する．

$$\varepsilon \approx \int_0^{k_D} D(k) dk = \nu \varepsilon^{2/3} k_D^{4/3} \quad (65)$$

これより， $k_D$  および空間スケール  $\ell_D = 2\pi/k_D$  は

$$\begin{aligned} k_D &= \left( \frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \\ \ell_D &= \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (66)$$

空間スケール  $\ell_D$  は渦の散逸スケールで，コルモゴロフスケールと呼ばれる．

慣性小領域の存在条件式 (59) は，次式で表される．

$$\frac{k_E}{k_D} = \frac{\ell_D}{\ell_E} = \left( \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \right)^{-3/4} \ll 1 \quad (67)$$

これより

$$\frac{K^2}{\nu \varepsilon} \gg 1 \quad (68)$$

$K^2/\varepsilon$  は動粘性係数の単位を持ち， $\ell_E u_E$  で表される．これを  $\nu_t$  とすると

$$\frac{\nu_t}{\nu} \gg 1 \quad (69)$$

$\nu_t$  は，乱流に関する粘性を表すものとして乱流粘性係数と呼ばれる．粘性係数と乱流粘性係数の比  $Re_t = \nu_t/\nu$  は乱流レイノルズ数と呼ばれる．

流れ場の代表長さを  $L$ ，代表速度を  $U$  とすると，次元解析より  $K, \varepsilon$  は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} K &= U^2 \\ \varepsilon &= \frac{U^3}{L} \end{aligned} \quad (70)$$

これより，式 (68) は

$$Re \gg 1 \quad (71)$$

つまり，レイノルズ数が十分に大きい流れであれば，エネルギー保有領域と散逸領域が分離し，慣性小領域が存在する．

レイノルズ数が大きな乱流は，小さなスケールにおいて流れ場に依存しない普遍的な性質をもつ．以上は乱流の統計理論による結論であるが，近年の直接数値シミュレーション (DNS) により，乱流には普遍的な組織的微小構造 (コヒーレント微小構造) が存在することがわかっている [6]．

## 4 乱流モデル

### 4.1 渦の散逸スケール

渦の散逸スケール  $\ell_D$  を，平均流のスケールとの関連で見積もってみよう．流れ場の代表長さを  $L$ ，代表速度を  $U$  とすると，次元解析より  $\varepsilon$  は次式で表すことができる．

$$\varepsilon = \frac{U^3}{L} \quad (72)$$

これより， $\ell_D/L$  は次式で表される．

$$\frac{\ell_D}{L} = Re^{-3/4} \quad (73)$$

たとえば，水道の流れを考えてみよう． $\nu = 10^{-6}$  [m<sup>2</sup>/s]， $U = 1$  [m/s]， $L = 0.01$  [m] とすると， $Re = 10^4$  なので  $\ell_D = 10^{-5}$  [m] である．渦の散逸が極めて小さなスケールで起こることがわかる．乱流の数値解析の観点から見ると，計算格子幅を散逸スケール程度にした場合， $x$  方向の分割数  $N_x$  は次式で見積もられる．

$$N_x = \frac{L}{\ell_D} = Re^{3/4} \quad (74)$$

3 方向で考えると，格子数  $N$  は

$$N = N_x N_y N_z = Re^{9/4} \quad (75)$$

上で挙げた例の場合，必要な格子数は  $10^9$  (10 億) となる．比較的遅い流れでこの程度であるので，一般的な乱流ではさらに多くの格子数が必要になる．日常的なエンジニアリングで用いられる格子数が，現状数百万から多くて数千万程度であることを考えると，乱流をまともに計算することは現実的ではない．したがって，何らかのモデル化が必要である．

## 4.2 乱流モデル

エンジニアリングにおいて乱流の数値解析を行う場合、乱流をモデル化した乱流モデル (turbulence model) が用いられる。それに対し、乱流モデルを用いない計算は直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation: DNS) と呼ばれ、主に研究目的で実施される。

乱流モデルには、レイノルズ平均を用いるものと、空間平均を用いるものがある。レイノルズ平均を用いるモデルはレイノルズ平均モデルあるいは RANS モデルと呼ばれ、モデル化の種類として RANS 方程式のレイノルズ応力をモデル化するものと、レイノルズ応力輸送方程式をモデル化するものがある。一方、空間平均を用いるものとしてはラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation: LES) がある。

RANS モデルは、大きなスケールの乱れをモデル化するため、モデル化のために参照した解析対象の条件も含めてモデル化されていると考えられ、汎用的なものにはなりにくい。したがって、解析対象に合わせて様々なモデルが提案されている。レイノルズ平均の性質上、定常計算や 2 次元計算が可能であり、利用の手軽さからエンジニアリングにおいて多用されるが、流れの詳細な非定常性の再現には向かない。

一方、LES は、大きな渦は直接計算し、流れ場に依存しない普遍的な性質をもつとされる小さな渦のみをモデル化しており、比較的汎用性のあるモデルと考えられている。しかし、格子幅を慣性小領域に設定しなければならないため格子数が多くなり、また常に 3 次元の非定常計算になるため、多くの計算リソースが必要である。近年の計算機の性能向上のため実用例は増えてきているが、いまだ日常的な利用には厳しいところがある。

## 4.3 渦粘性モデル

RANS 方程式のレイノルズ応力のモデル化を考える。分子粘性による応力とのアナロジーから、レイノルズ応力  $R_{ij}$  を次式のように表す。

$$-R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t \bar{D}_{ij} - \frac{2}{3}(\nu_t \bar{D}_{ii} + k)\delta_{ij} \quad (76)$$

ここで  $k$  は乱流エネルギーである。右辺第 2 項は、 $k = \overline{u'_i u'_i}/2$  を満たすためのものである。 $\nu_t$  は渦粘性係数 (eddy viscosity) あるいは乱流粘性係数 (turbulent viscosity) と呼ばれる。レイノルズ応力を渦粘性で表現するというので、上のモデルをベースにした乱流モデルは一般に渦粘性モデル (eddy viscosity model) と呼ばれる。渦粘性モデルでは、基本的に乱れが等方的になる。

式 (76) を式 (12) に代入し、 $k$  の項は圧力に組み込むものとする、次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (2\nu_{eff} \bar{D}) \quad (77)$$

ここで  $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$  であり、乱流の効果は乱流粘性係数に集約されている。

乱流粘性の効果は、熱や物質濃度の拡散でも考慮する必要がある。粘性係数同様に熱拡散率を  $\alpha_{eff} = \alpha + \alpha_t$  と表現し、 $\alpha_t = \nu_t / Pr_t$  と見積もる。ここで  $Pr_t$  は乱流プラントル数 (turbulent Prandtl number) である。物質拡散係数も同様に  $D_{eff} = D + D_t$  とし、 $D_t = \nu_t / Sc_t$  で見積もる。 $Sc_t$  は乱流シュミット数 (turbulent Schmidt number) である。熱拡散率と物質拡散係数の比はルイス数 (Lewis number)  $Le$  と呼ばれ、乱流ルイス数を  $Le_t$  とすると  $Le_t = \alpha_t / D_t = Sc_t / Pr_t$  と書ける。経験的に  $Pr_t$  は 0.85、 $Sc_t$  は 0.7 程度の値が用いられる。実際の値は流れ場や物質による。

#### 4.4 混合長モデル

渦粘性モデルを完成するには、乱流粘性係数を求める必要がある。プラントル (Prandtl) は、気体分子運動とのアナロジーから、分子の平均自由行程に対応する渦粒子の行程である混合長 (mixing length) というものを考えた。混合長を  $\ell_m$  とし、代表時間スケールを  $\tau$  とし、代表速度を  $u_t = \ell_m / \tau$  で定義すると、乱流粘性係数は次式で表現できる。

$$\nu_t = \ell_m u_t = \frac{\ell_m^2}{\tau} \quad (78)$$

時間スケールが平均速度勾配の逆数に比例すると考え、比例定数を  $\ell_m$  に含めるものとする

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (79)$$

ここでは  $\bar{u}$  を平均速度の  $x$  方向成分として、2 次元的に考えている。

混合長は、乱流境界層においては次式が知られている。

$$\ell_m = \kappa y \quad (80)$$

ここで  $\kappa = 0.40 \sim 0.45$  はカルマン定数であり、 $y$  は壁からの距離である。また、乱流混合層 (流れが混ざり合っている層) では次式で表される。

$$\ell_m = 0.07L \quad (81)$$

ここで  $L$  は層の厚みである。

混合長モデルは、追加の方程式を必要としないため、混合長が指定できる問題では簡単で有用なモデルであるが、一般的な流れでは混合長を指定しにくい、汎用的なものではない。

#### 4.5 1 方程式モデル

乱流の代表速度を  $u_t = k^{1/2}$  で表し、乱流の長さスケールを  $\ell$  とすると、乱流粘性係数  $\nu_t$  は次式で表すことができる。

$$\nu_t = \ell u_t = k^{1/2} \ell \quad (82)$$

ここで  $k$  を計算することができれば，長さスケールを指定することで乱流粘性係数を計算できる． $k$  の輸送方程式 (34) はそのままでは解けないので，これを次式のようにモデル化する．

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + D_k \quad (83)$$

ここで  $P_k$  は，レイノルズ応力の渦粘性表現から

$$P_k = (2\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{D}_{ii}\delta_{ij})v_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (84)$$

と表せる． $k$  の項は無視した．非圧縮性流体の場合，次のように表せる．

$$P_k = 2v_t \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} \quad (85)$$

第 1 項については，

$$\bar{D}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} \quad (86)$$

であることを用いた．なぜなら

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (87)$$

および

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (88)$$

より

$$\bar{D}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} \quad (89)$$

である． $D_k$  は

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} \quad (90)$$

であり，拡散項をモデル化したものである． $\sigma_k$  は乱流プラントル数と呼ばれ，一般に 1.0 とされる． $\varepsilon$  は，次元解析より次式でモデル化する．

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (91)$$



$C_D$  は定数であり, 0.08 程度の値である.

長さスケール  $l$  を与えることができれば, 方程式系は閉じる. 長さスケールは混合長  $l_m$  に比例するものと考えられるが, 一般的には値を経験的に設定することになる.

以上のモデルは, プラントルにより提案されたもので, RANS 方程式系に方程式が 1 つ追加されるため 1 方程式モデルと呼ばれる. それに対し, 追加の方程式が必要な混合長モデルは 0 方程式モデルと呼ばれる. 他の 1 方程式モデルとしては, 乱流粘性係数を求めるための乱流粘性パラメタ  $\tilde{\nu}$  の輸送方程式を解く Spalart-Allmaras モデルがある. 1 方程式モデルは, 混合長モデルよりはましであるが, 適用範囲は限定的である.

#### 4.6 標準 $k$ - $\varepsilon$ モデル

プラントルの 1 方程式モデルでは, 長さスケールを指定する必要がある. そこで, 長さスケールを変数にした 2 方程式モデルが考えられるが, 乱流粘性係数が計算できさえすれば  $k$  と組み合わせるものはなんでもよい. いずれにしても  $\varepsilon$  は計算する必要があるので, 変数として  $\varepsilon$  を選択するほうが手続き上は自然である.  $k$  と  $\varepsilon$  を変数とする 2 方程式モデルは  $k$ - $\varepsilon$  モデルと呼ばれる.

乱流粘性係数  $\nu_t$  は, 次元解析から  $k$  と  $\varepsilon$  により次式で表される.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (92)$$

ここで  $C_\mu$  は定数である.

$k$  の輸送方程式と同様に, 式 (13) から  $\varepsilon$  の輸送方程式を導くことができるが, 煩雑なので, ここでは方程式全体をモデル化するものとして,  $\varepsilon$  の輸送方程式を次式で表す.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + D_\varepsilon \quad (93)$$

ここで,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$  は定数であり,  $D_\varepsilon$  は

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \quad (94)$$

である.  $\sigma_\varepsilon$  は定数である.

式 (83), (93), (92) を用いる 2 方程式モデルは, 標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルと呼ばれる. 各定数の値は, 一般に以下のものが用いられる.

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad (95)$$

標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルは広い分野に適用されている. ただし, RANS モデルである以上汎用的なモデルではありえないので, 標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルをベースにさまざまな改良モデルが提案されている.

標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルは, 長さスケールのようなパラメタを必要としないため, エンジニアリングにおいて比較的使いやすいモデルである. とはいえ, 初期値や流入条件とし

て  $k, \varepsilon$  の値を指定する必要があり, なんらかの値を見積もる必要がある. 平均流の代表速度を  $U$  として, 乱流強度 (turbulent intensity)  $I$  を次式で定義する.

$$I = \frac{u'}{U} \quad (96)$$

これは平均流に対する乱れの割合で, 十分に発達した流れでは数%の値を取るといわれる. これを用いて,  $k$  は次式で見積もられる.

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2 \quad (97)$$

$\varepsilon$  については, 次式で見積もられる.

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\ell_m} \quad (98)$$

混合長  $\ell_m$  を与える必要があるが, 十分に発達した流れでは次式で見積もることができる.

$$\ell_m = 0.07L \quad (99)$$

ここで  $L$  は代表長さである. ダクト流れでは代表長さとして水力直径 (hydraulic diameter) が用いられる. 水力直径を  $D$ , 断面積を  $A$ , 断面周長を  $\ell$  とすると  $D = 4A/\ell$  である. 円形断面では  $D$  は円の直径である.

壁境界については,  $k$  は壁の法線方向勾配を 0 とし,  $\varepsilon, \nu_t$  については壁関数を用いる.

## 4.7 境界層の取り扱い

物体表面では流速が 0 になるため, 壁近傍では速度が急激に変化する. 数値解析を考えたとき, それを解像するほどの格子を用意するのは計算コストがかかる. また, 高レイノルズ数流れを想定している標準  $k-\varepsilon$  モデルで壁近傍の低レイノルズ数流れを解くのは適切ではない. それらの問題を避けるため, その部分を直接解く代わりに, 壁近傍の流れ (境界層) の普遍的性質を用いて境界条件として考慮することが考えられる. 以下ではその方法について述べる.

### 4.7.1 境界層

流れは粘性により物体表面に付着・静止するが, レイノルズ数が大きい流れの場合, その影響は物体表面の薄い層の中に限られる. この薄い層を境界層 (boundary layer) という. これに対し, 境界層外の流れを主流 (external flow) という. 境界層は, はじめは層流として発生する. 境界層はだんだんと厚みを増し, あるところで乱流になる. 層流の境界層を層流境界層, 乱流の境界層を乱流境界層という. 主流のレイノルズ数が  $10^3 \sim 10^5$  程度の場合, 物体は層流境界層に覆われる. レイノルズ数がそれ以上に

なると、乱流境界層への遷移が起こりはじめ、レイノルズ数が大きくなるにつれて乱流境界層の割合が増していく。

翼の上面や拡大するダクトなど、主流に沿って圧力上昇が起こる場合、境界層が壁面からはがれるということが起こる。これを境界層のはく離という。以下では、層流境界層から乱流境界層への遷移や、境界層のはく離については考えないものとする。

#### 4.7.2 壁法則

乱流境界層内の速度分布を導くことを考える。壁面からの距離を  $y$  とする。壁に沿う方向の平均速度と変動速度をそれぞれ  $\bar{u}$ 、 $u'$ 、壁に垂直な方向の変動速度を  $v'$  とする。実測によると、 $\overline{u'v'}$  は壁近傍ではほぼ一定になるため、壁面せん断応力はレイノルズ応力で表すことができる。壁面せん断応力を  $\tau_w$  として、プラントルの混合長の仮説を用いると

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \ell_m^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (100)$$

摩擦速度 (friction velocity) というものを  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  で定義すると

$$u_\tau = \ell_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (101)$$

渦粒子は、壁近傍では壁による制約を受け、壁から離れるにつれ自由になると考えられる。したがって、混合長は壁からの距離  $y$  に比例すると仮定できる。

$$\ell_m = \kappa y \quad (102)$$

ここで  $\kappa$  はカルマン (Karman) 定数と呼ばれ、値は 0.40 ~ 0.45 とされる (だいたい 0.41 が用いられる)。

これを用いて、摩擦速度は次式のように表される。

$$\frac{u_\tau}{y} = \kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (103)$$

$y = y_0$  で  $u = 0$  として、両辺を  $y$  で  $y_0$  から  $y$  まで積分すると

$$u_\tau \ln \frac{y}{y_0} = \kappa \bar{u} \quad (104)$$

速度の無次元数を  $u^+ = \bar{u}/u_\tau$  で定義すると

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (105)$$

ここで  $y_0$  が問題である。乱流境界層においても壁近傍には薄い層流の層がある。これは粘性底層 (viscous sublayer) と呼ばれる。 $y_0$  は粘性底層の厚み  $\delta_l$  に比例すると考えられる。 $y = \delta_l$  における速度を  $u_l$  とすると、平均速度の勾配は次式で表される。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_l}{\delta_l} \quad (106)$$

一方，粘性底層における壁面せん断応力  $\tau_w$  は，次式で表される．

$$\tau_w = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (107)$$

$\tau_w/\rho = u_\tau^2$  なので

$$u_\tau^2 = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (108)$$

これに式 (106) を代入すると，次式が得られる．

$$u_l = \frac{u_\tau^2}{\nu} \delta_l \quad (109)$$

粘性底層のレイノルズ数  $u_l \delta_l / \nu = (u_\tau \delta_l / \nu)^2$  には一定の値があると考えられるから， $u_\tau \delta_l / \nu$  は定数であり， $\delta_l$  は  $\nu / u_\tau$  に比例する．つまり， $y_0$  は  $\nu / u_\tau$  に比例する．

$y_0 = \beta \nu / u_\tau$  とすると，式 (105) は

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\beta \nu} \quad (110)$$

壁からの距離の無次元数を  $y^+ = u_\tau y / \nu$  で定義すると

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{\beta} \quad (111)$$

$B = -(1/\kappa) \ln \beta$  とすると

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (112)$$

実測により，なめらかな壁では  $B = 5.5$  とされる．あるいは  $E = 1/\beta$  として

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+ \quad (113)$$

なめらかな壁では  $E = 9.8$  とされる ( $E = e^{\kappa B}$ )．これは対数則 (log law) と呼ばれ，乱流境界層の中でこれが成り立つ領域は対数則層 (log law layer) あるいは対数領域 (logarithmic region) と呼ばれる．

粘性底層については，別の法則が成り立つ． $y = 0$  で  $\bar{u} = 0$  として，式 (108) の両辺を  $y$  で積分すると

$$u_\tau^2 y = \nu \bar{u} \quad (114)$$

これより

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (115)$$

したがって

$$u^+ = y^+ \quad (116)$$

つまり，粘性底層では，速度が壁からの距離に比例する．これは線形則 (linear law) と呼ばれる．

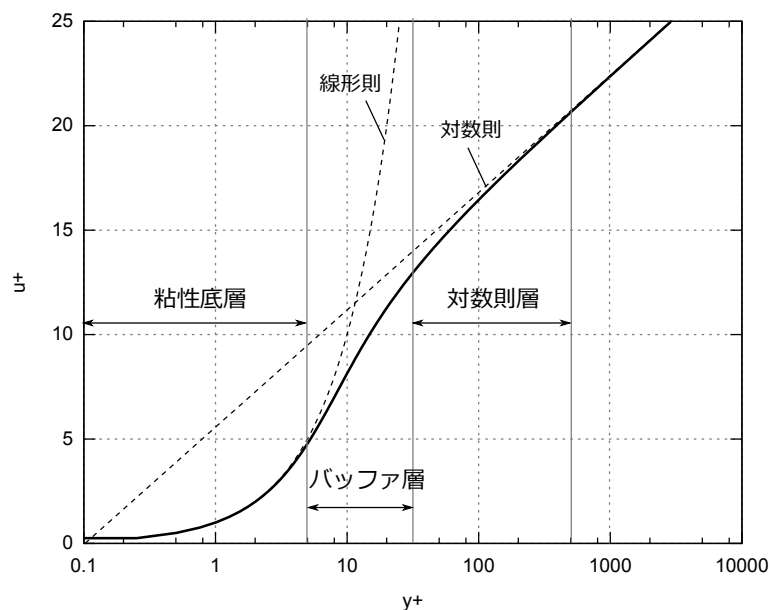


図 3: 境界層の速度分布

粘性底層と対数則層のそれぞれの範囲は，粘性底層がだいたい  $y^+ < 5$  であり，対数則層がだいたい  $30 < y^+ < 500$  である．両者の間はバッファ層 (buffer layer) と呼ばれ，粘性底層から対数則層への遷移領域である (図 3)．

以上のように，境界層内の流れは主流のレイノルズ数とは無関係で，密度，粘性係数，壁面せん断応力，壁からの距離によって支配される．これを壁法則 (law of the wall) という．

#### 4.7.3 壁関数

数値解析を考えた場合，速度が狭い範囲で急激に変化する境界層を解像しようとするとき，壁際に細かい格子を用意する必要があり，格子幅は小さく，格子数は膨大になってしまう．また，標準  $k-\varepsilon$  モデルは高レイノルズ数を想定しており，壁近傍の低レイノルズ数流れに適用するのは適切ではない．これらの問題を避けるため，壁の第 1 格子点を対数則層に入れ，壁法則により境界条件を与える方法が考えられる．これは壁関数 (wall function) による方法と呼ばれている．

境界層内の流れが，流れ方向に特性が変わらない十分に発達した乱流である場合，対数則層において乱流エネルギーの生成とエネルギー散逸率との平衡性を仮定できる．

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P_k - \varepsilon = 0 \quad (117)$$

これより

$$\varepsilon = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (118)$$

壁面せん断応力  $\tau_w$  を次式で表す .

$$\tau_w = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (119)$$

ここで  $\mu_t = \rho \nu_t$  は乱流粘性係数である .  $\tau_w / \rho = u_\tau^2$  より

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu_t} \quad (120)$$

上式および式 (92) より , 式 (118) は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \\ &= \frac{u_\tau^4}{\nu_t} \\ &= \frac{u_\tau^4}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k^2} \end{aligned} \quad (121)$$

これより , 摩擦速度  $u_\tau$  は次式で表される .

$$u_\tau = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (122)$$

式 (103) より

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (123)$$

上式および式 (120) から , 式 (118) は

$$\varepsilon = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (124)$$

これに式 (122) を代入して

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (125)$$

壁面粘性係数を  $\nu_w$  とすると , 壁面せん断応力  $\tau_w / \rho$  は

$$\nu_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_\tau^2 \quad (126)$$

両辺を  $y$  で積分して

$$\begin{aligned} \nu_w \bar{u} &= u_\tau^2 y \\ \nu_w &= \nu \frac{u_\tau}{\bar{u}} \frac{u_\tau y}{\nu} \end{aligned} \quad (127)$$

したがって

$$\nu_w = \nu \frac{y^+}{u^+} \quad (128)$$

便宜上,  $\nu_w = \nu_{eff} = \nu + \nu_t$  と表すとすると

$$\nu + \nu_t = \nu \frac{y^+}{u^+} \quad (129)$$

となるので, 壁面では  $\nu_t$  を次式で計算すればよい.

$$\nu_t = \nu \left( \frac{y^+}{u^+} - 1 \right) \quad (130)$$

壁の第1格子点が粘性底層に入ってしまったときのことを考えて,  $y^+$  の値に応じて対数則層と粘性低層を切り替えるようにする. このような方法を2層モデル (two-layer model) という. 粘性底層の場合, 粘性係数は  $\nu_w = \nu, \nu_t = 0$  となる. 切り替えは  $y_{lam}^+$  で行う.  $y_{lam}^+$  は対数則と線形則の交点, つまり

$$y^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+ \quad (131)$$

を満たす  $y^+$  であり, 11 付近の値である.

壁面における乱流エネルギーの生成項は, 対数則層の場合, 式 (123) を用いて次式で評価できる.

$$P_k = \tau'_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau'_w \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (132)$$

ここで

$$\tau'_w = \nu_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (133)$$

粘性底層の場合は,  $u^+ = y^+$  より  $\bar{u} = u_\tau^2 y / \nu$  なので

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \quad (134)$$

これより

$$P_k = \tau'_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau'_w \frac{u_\tau^2}{\nu} \quad (135)$$

摩擦速度  $u_\tau$  は式 (122) で計算できる.

#### 4.7.4 粗い壁の場合

粗い壁の場合, 粗さを考えた壁法則を用いる必要がある. たとえば, 紙やすりのように表面に砂粒が並んだ粗さを考え, 砂粒の径  $k_s$  で粗さ (roughness) の効果を表すことにする. 粗さ  $k_s$  が粘性底層の厚み  $\delta_l$  に比べて十分に大きい場合, 式 (105) の  $y_0$  は  $k_s$  に比例すると考えられる.  $y_0 = \gamma k_s$  とすると, 式 (105) より

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\gamma k_s} \quad (136)$$

粗さの無次元数を  $k_s^+ = u_\tau k_s / \nu$  と定義すると

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{\gamma k_s^+} \quad (137)$$

$B = -(1/\kappa) \ln \gamma$  とすると

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{k_s^+} + B \quad (138)$$

実測により,  $B = 8.5$  である. ただし, これは十分に粗い面 ( $k_s^+ > 70 \sim 90$ ) についての値で, 粗さによって  $B$  は変化する.  $k_s^+ < 5$  程度の範囲では,  $B$  は次式で表される.

$$B = 5.5 + \frac{1}{\kappa} \ln k_s^+ \quad (139)$$

これを式 (138) に代入すると, なめらかな壁に対する式と一致する. 粘性底層の範囲は  $y^+ < 5$  であるので, 粘性底層の厚みは  $\delta_l \approx 5\nu/u_\tau$  と見積もることができる. したがって,  $k_s^+ < 5$  は  $k_s < 5\nu/u_\tau \approx \delta_l$  ということになり, 粗さが粘性底層に埋もれている場合, 粗さは流れに影響を与えないという意味になる.

粗さに応じた  $B$  の変化を考慮した式として, 次の Cebeci と Bradshaw による式がある.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) - \Delta B \quad (140)$$

ここで  $\Delta B$  は, 粗さに合わせて次のように表される.

$$k_s^+ \leq 2.25$$

$$\Delta B = 0 \quad (141)$$

$$2.25 < k_s^+ \leq 90$$

$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{k_s^+ - 2.25}{87.75} + C_s k_s^+ \right) \sin \{0.4258(\ln k_s^+ - 0.811)\} \quad (142)$$

$$k_s^+ > 90$$

$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} (1 + C_s k_s^+) \quad (143)$$

粗さ定数  $C_s$  は粗さのタイプにより決まる定数で, 粗さが均一な場合は 0.5, 不均一な場合は 0.5 ~ 1.0 の値を取るとされる.

#### 4.7.5 温度と物質濃度の壁関数

速度と同様, 温度についても, 温度境界層を扱うために壁関数が用いられる. 温度についての対数則は, 次式で表される.

$$T^+ = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \ln(\tilde{E}y^+) \quad (144)$$

ここで

$$T^+ = \frac{(T_w - T)\rho c_p u_\tau}{q_w} \quad (145)$$



であり,  $T_w$  は壁の温度,  $c_p$  は比熱,  $q_w$  は壁の熱流束である. 式 (113) より

$$\begin{aligned}
 T^+ &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \ln(\tilde{E}y^+) \\
 &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \ln\left(\frac{\tilde{E}}{E} e^{u^+\kappa}\right) \\
 &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \ln\left(\frac{\tilde{E}}{E}\right) + \frac{1}{\tilde{\kappa}} u^+\kappa \\
 &= \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \left\{ u^+ + \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{\tilde{E}}{E}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{146}$$

比  $\kappa/\tilde{\kappa}$  は乱流プラントル数  $Pr_t$  に当たる. 上式を次のように表現する.

$$T^+ = Pr_t(u^+ + P) \tag{147}$$

ここで  $P$  は Jayatilke の pee-function と呼ばれ, 次式で定義される.

$$P = 9.24 \left\{ \left( \frac{Pr}{Pr_t} \right)^{3/4} - 1 \right\} \left( 1 + 0.28e^{-0.007Pr/Pr_t} \right) \tag{148}$$

$Pr$  はプラントル数で, 熱拡散率を  $\alpha$  とすると  $Pr = \nu/\alpha$  である.

壁近傍の熱伝導率を  $k_w$  とすると, 壁の熱流束は

$$q_w = -k_w \frac{\partial T}{\partial y} \tag{149}$$

両辺を  $y$  で積分して

$$q_w y = -k_w (T - T_w) \tag{150}$$

これより, 熱伝導率は

$$k_w = \frac{q_w y}{T_w - T} \tag{151}$$

壁の熱拡散率  $\alpha_w$  は

$$\alpha_w = \frac{k_w}{\rho c_p} = \frac{q_w u_\tau y}{(T_w - T) \rho c_p u_\tau} = \nu \frac{y^+}{T^+} \tag{152}$$

粘性底層では  $\alpha_w = \alpha = \nu/Pr$  なので, 次式の線形則が成り立つ.

$$T^+ = Pr y^+ \tag{153}$$

以上より, 壁の熱拡散率は次のように計算される.

$$\alpha_w = \begin{cases} u_\tau y / (Pr y^+) & (y^+ < y_{therm}^+) \\ u_\tau y / [Pr_t \{ (1/\kappa) \ln E y^+ + P \}] & (y^+ \geq y_{therm}^+) \end{cases} \tag{154}$$

ここで,  $y_{therm}^+$  は対数則と線形則の交点, つまり

$$y^+ = \frac{Pr_t}{Pr} \left( \frac{1}{\kappa} \ln E y^+ + P \right) \tag{155}$$

を満たす  $y^+$  である .

物質の濃度についても同様である . 物質の質量濃度を  $Y$  とすると , 対数則は

$$Y^+ = \frac{(Y_w - Y)\rho u_\tau}{J_w} = Sc_t(u^+ + P_s) \quad (156)$$

$$P_s = 9.24 \left\{ \left( \frac{Sc}{Sc_t} \right)^{3/4} - 1 \right\} \left( 1 + 0.28e^{-0.007Sc/Sc_t} \right)$$

ここで  $J_w$  は物質拡散流束である .  $Sc$  はシュミット数で , 物質拡散係数を  $D$  とすると  $Sc = \nu/D$  である . 粘性底層では次式が成り立つ .

$$Y^+ = Scy^+ \quad (157)$$

壁の物質拡散係数は次のように計算される .

$$D_w = \begin{cases} u_\tau y / (Scy^+) & (y^+ < y_s^+) \\ u_\tau y / [Sc_t \{ (1/\kappa) \ln Ey^+ + P_s \}] & (y^+ \geq y_s^+) \end{cases} \quad (158)$$

ここで  $y_s^+$  は対数則と線形則の交点 , つまり

$$y^+ = \frac{Sc_t}{Sc} \left( \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+ + P \right) \quad (159)$$

を満たす  $y^+$  である .

## 4.8 その他の渦粘性モデル

標準  $k-\varepsilon$  モデルは , 比較的単純な流れ場においては成果を挙げているが , 曲率 , 旋回 , はく離などがある流れ場に対しては精度が悪いことが知られている . そのため , さまざまな改良モデルが提案されている . 以下では主要な改良モデルについて概要を述べる .

### 4.8.1 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル

複雑な流れ場においては , 壁近傍で壁関数の前提が成り立たない場合がある . たとえば , 層流から乱流への遷移領域を含む流れ , はく離 , 熱伝達に関する温度境界層についての問題などでは , 一般に正しい解を与えない . この場合 , 壁関数を使わずに壁近傍の低レイノルズ数流れをきちんと解く必要があるが , 高レイノルズ数型の標準  $k-\varepsilon$  モデルでは , 壁近傍での低レイノルズ数流れによるレイノルズ応力の減衰効果を正しく表現することができない . そこで , 減衰関数により低レイノルズ数効果を表現する低レイノルズ数型  $k-\varepsilon$  モデルが提案されている .  $k-\varepsilon$  モデルに限らず , 壁近傍の低レイノルズ数効果を考慮したモデルは一般に低レイノルズ数型モデル (low-Reynolds number model) と呼ばれる .

壁近傍での減衰を考慮した乱流粘性係数は，次のように表される．

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (160)$$

ここで， $f_\mu$  は乱流粘性係数の減衰効果を表す減衰関数 (damping function) である．

低レイノルズ数型  $k$ - $\varepsilon$  モデルの方程式は，一般に以下のように表される．

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = P_k - (\tilde{\varepsilon} + D) + D_k \quad (161)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varepsilon} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \tilde{\varepsilon}) + E + D_{\tilde{\varepsilon}} \quad (162)$$

$$D_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right\}$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (163)$$

ここで  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$  である．

低レイノルズ数型  $k$ - $\varepsilon$  モデルとしていくつものモデルが提案されている．その中から以下に Launder-Sharma モデル，Lam-Bremhorst モデルを示す．

#### Launder-Sharma モデル

$$\begin{aligned} f_\mu &= \exp \left[ \frac{-3.4}{(1 + Re_t/50)^2} \right] \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2) \\ D &= 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \\ E &= 2\nu \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (164)$$

#### Lam-Bremhorst モデル

$$\begin{aligned} f_\mu &= [1 - \exp(-0.0165Re_y)]^2 \left( 1 + \frac{20.5}{Re_t} \right) \\ f_1 &= 1 + \left( \frac{0.05}{f_\mu} \right)^3 \\ f_2 &= 1 - \exp(-Re_t^2) \\ D &= 0 \\ E &= 0 \end{aligned} \quad (165)$$

ここで,  $Re_t$ ,  $Re_y$  は以下で表される無次元数である .

$$\begin{aligned} Re_t &= \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \\ Re_y &= \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \end{aligned} \quad (166)$$

$y$  は壁からの距離である .

$k$  の壁の境界条件は  $k = 0$  である .  $\varepsilon$  の壁の境界条件は

$$\varepsilon = 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (167)$$

これを便宜的に

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (168)$$

とすると, 境界条件を  $\tilde{\varepsilon} = 0$  とできる . Launder-Sharma モデルでは  $\varepsilon$  の代わりに  $\tilde{\varepsilon}$  が使われる . 式 (161), (162) の  $D, E$  は,  $\tilde{\varepsilon}$  を用いる場合の付加項である . 式 (167) の条件を用いる場合, 数値計算上はこれをそのまま用いず, 壁近接点に対して次式を用いる .

$$\varepsilon = 2\nu \frac{k}{y^2} \quad (169)$$

提案されているモデルごとにそれぞれ減衰関数や境界条件などが異なり, 乱流諸量の壁面漸近挙動をどれだけ正しく満たしているかについて違いがある .

壁面漸近挙動とは, 壁に近づいたときの諸量の変化の仕方のことである . 変動速度の各成分を  $u', v', w'$  とすると, 壁面上 ( $y = 0$ ) では

$$\begin{aligned} u' &= v' = w' = 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (170)$$

から,  $u', v', w'$  のテーラー展開は次のように表される .

$$\begin{aligned} u' &= a_1 y + a_2 y^2 + \dots \\ v' &= b_2 y^2 + \dots \\ w' &= c_1 y + c_2 y^2 + \dots \end{aligned} \quad (171)$$

これより, 壁近傍での  $k$  は

$$k \approx \frac{1}{2} (a_1^2 + c_1^2) y^2 \quad (172)$$

また, 壁近傍での  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon \approx \nu (a_1^2 + c_1^2) \quad (173)$$

$k$  は壁近傍で  $y$  の 2 乗に比例し,  $\varepsilon$  は  $y$  の 0 乗に比例する (つまり一定値になる). このように, ある量が壁近傍で  $y$  の何乗に比例して変化するかということを, その量の壁面漸近挙動 (near-wall limiting behavior) と呼ぶ. 式 (172) より

$$\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2) \quad (174)$$

式 (173) より

$$\varepsilon = 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2 \quad (175)$$

つまり式 (167) である. あるいは

$$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = a_1^2 + c_1^2 \quad (176)$$

から

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \quad (177)$$

でもよい. また, 微分を考えなければ, 単純に式 (172), (173) から式 (169) が得られる.

$\varepsilon$  については,  $y$  の高次の項まで考慮して  $\varepsilon$  の式を導くと,  $y$  の 1 乗に比例することがわかる.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}(a_1^2 + c_1^2)y^2 + O(y^3) \\ \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} &= a_1^2 + c_1^2 + O(y) \\ \varepsilon &= \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + O(y) = D + \varepsilon \end{aligned} \quad (178)$$

乱流粘性係数については, レイノルズ応力  $-\overline{u'v'}$  より  $y$  の 3 乗に比例する. それゆえ減衰関数  $f_\mu$  は,  $\varepsilon$  の場合は式 (160) から  $y$  の -1 乗に,  $\varepsilon$  の場合は式 (163) から  $y$  の 0 乗に比例しなければならない. Launder-Sharma モデルはこの条件を満たすが, Lam-Bremhorst モデルは満たさない. それにも関わらず Lam-Bremhorst モデルは広く用いられ, 成果を上げている.

#### 4.8.2 RNG $k$ - $\varepsilon$ モデル

RNG  $k$ - $\varepsilon$  モデルは, 繰り込み群 (renormalization group, RNG) 理論を用いたもので, 標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルの各モデル定数を理論的に導出し, 平均ひずみ効果の補正が加えられている. 平均ひずみの大きな流れに有効である.

RNG  $k$ - $\varepsilon$  モデルの方程式は, 以下の通りである.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + D_k \quad (179)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1}^* P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + D_\varepsilon \quad (180)$$

ここで

$$C_{\varepsilon 1}^* = C_{\varepsilon 1} - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3} \quad (181)$$

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}}$$

各定数は

$$C_\mu = 0.0845 \quad \sigma_k = 1/\alpha_k \quad \sigma_\varepsilon = 1/\alpha_\varepsilon \quad \alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.39 \quad (182)$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.42 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68 \quad \eta_0 = 4.38 \quad \beta = 0.012$$

#### 4.8.3 Realizable $k$ - $\varepsilon$ モデル

Realizable  $k$ - $\varepsilon$  モデルは、 $\overline{u'^2}$ 、 $k$ 、 $\varepsilon$  などの値は負になりえないという物理的な実現性 (realizability) の制限を課したモデルである。曲率や旋回がある流れなどに有効とされる。

Realizable  $k$ - $\varepsilon$  モデルの方程式は、以下の通りである。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + D_k \quad (183)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + D_\varepsilon \quad (184)$$

ここで

$$C_{\varepsilon 1} = \max \left( 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right) \quad (185)$$

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}}$$

乱流粘性係数は，次のようにモデル化される．

$$\begin{aligned}
\nu_t &= C_\mu \frac{k}{\varepsilon} \\
C_\mu &= \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}} \\
U^* &= \sqrt{\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij} + \bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{ij}} \\
\bar{\Omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\
A_s &= \sqrt{6} \cos \phi \\
\phi &= \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W) \\
W &= \min \left[ \max \left( 2\sqrt{2} \frac{\bar{D}_{ij}\bar{D}_{jk}\bar{D}_{ik}}{(\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij})^{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \frac{1}{\sqrt{6}} \right]
\end{aligned} \tag{186}$$

各定数は

$$\sigma_k = 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1.2 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9 \quad A_0 = 4.0 \tag{187}$$

#### 4.8.4 $k$ - $\omega$ モデル

$k$ - $\omega$  モデルは，変数として  $k$  と比散逸率 (specific dissipation rate)  $\omega = \varepsilon/k$  を採用したモデルである．乱流粘性係数は次式で計算される．

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \tag{188}$$

$k$  の輸送方程式は次式で表される．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} &= P_k - \beta^* k \omega + D_k \\
D_k &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\}
\end{aligned} \tag{189}$$

$\omega$  の輸送方程式は次式で表される．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega \bar{u}_j}{\partial x_j} &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + D_\omega \\
D_\omega &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\}
\end{aligned} \tag{190}$$

各定数は以下の通りである．

$$\beta^* = 0.09, \sigma_k = 2, \sigma_\omega = 2, \gamma = 5/9, \beta = 0.075 \tag{191}$$

$\omega$  の境界条件は壁近接点に対して次式で与えられる．

$$\omega = \frac{6\nu}{\beta_1 y^2} \quad (192)$$

“標準  $k$ - $\omega$  モデル” と一般に呼ばれるモデルには、いくつかのバージョンがある．上で挙げた初期のバージョンの  $k$ - $\omega$  モデルは、壁近傍の流れについては  $k$ - $\varepsilon$  モデルよりも得意だが、自由流れ (freestream) に弱い (自由流れに対して敏感．最近のバージョンでは改善されている)．この欠点の回避を目的の一つとして、SST  $k$ - $\omega$  モデルが提案された．

SST  $k$ - $\omega$  モデルは2つのモデルからなる．ひとつはBSL (baseline) モデルであり、壁近傍では  $k$ - $\omega$  モデル、その外側では  $k$ - $\varepsilon$  モデルから変換した  $k$ - $\omega$  モデルを用いる．もうひとつはSST (share stress transport) モデルであり、乱流のせん断応力の輸送効果を考慮する．

$\varepsilon$  の輸送方程式 (93) に  $\varepsilon = k\omega$  を代入すると、次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega u_j}{\partial x_j} = & (C_{\varepsilon 1} - 1) \frac{\omega}{k} P_k - (C_{\varepsilon 2} - 1) \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} \\ & + \frac{2}{k} \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (193)$$

上式と  $k$ - $\omega$  モデルの  $\omega$  の輸送方程式 (190) と比較すると、式 (190) には上式の右辺最終項に当たるものがない．この項は交差拡散項 (cross-diffusion term) と呼ばれ、 $k$ - $\varepsilon$  モデルと  $k$ - $\omega$  モデルの差を表している．

SST  $k$ - $\omega$  モデルの方程式は、以下の通りである．

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = \tilde{P}_k - \beta^* k \omega + D_k \quad (194)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} \tilde{P}_k - \beta \omega^2 + D_\omega + (1 - F_1) \frac{2\alpha_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (195)$$

ここで、 $F_1$  は混合関数 (blending function) であり、次式で定義される．

$$\begin{aligned} F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4k\alpha_{\omega 2}}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\} \\ CD_{k\omega} = \max \left( \frac{2\alpha_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \end{aligned} \quad (196)$$

壁から離れたところでは  $F_1$  の値が0となって  $k$ - $\varepsilon$  モデルになり、壁近傍では  $F_1$  の値が1となって  $k$ - $\omega$  モデルになるようになっている．

各係数についても、混合関数により次のように表す．

$$\begin{aligned} \alpha_k &= F_1 \alpha_{k1} + (1 - F_1) \alpha_{k2} \quad (\sigma_k = 1/\alpha_k) \\ \alpha_\omega &= F_1 \alpha_{\omega 1} + (1 - F_1) \alpha_{\omega 2} \quad (\sigma_\omega = 1/\alpha_\omega) \\ \gamma &= F_1 \gamma_1 + (1 - F_1) \gamma_2 \\ \beta &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2 \end{aligned} \quad (197)$$



乱流粘性係数と乱流エネルギーの生成項には制限 (limiter) をかける .

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, F_2 \sqrt{2D_{ij} D_{ij}})} \quad (198)$$

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, \beta^* k \omega) \quad (199)$$

ここで,  $F_2$  は混合関数で

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y'}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\} \quad (200)$$

各定数は以下の通りである .

$$\begin{aligned} \beta^* &= 0.09 & \alpha_{k1} &= 0.85 & \alpha_{k2} &= 1 & \alpha_{\omega 1} &= 0.5 & \alpha_{\omega 2} &= 0.856 \\ \gamma_1 &= 5/9 & \gamma_2 &= 0.44 & \beta_1 &= 0.075 & \beta_2 &= 0.828 \end{aligned} \quad (201)$$

#### 4.8.5 非線形 $k$ - $\varepsilon$ モデル

標準のレイノルズ応力の渦粘性表現は, レイノルズ応力の線形近似と考えることができる . そのような考え方から, レイノルズ応力の非線形表現がいくつか提案されている . レイノルズ応力の非線形表現を用いたモデルは非線形渦粘性モデル (nonlinear eddy viscosity model) と呼ばれ,  $k$ - $\varepsilon$  モデルの場合は非線形  $k$ - $\varepsilon$  モデルと呼ばれる .

乱れの非等方性を考慮するには, レイノルズ応力輸送モデルを用いる方法があるが, レイノルズ応力 6 成分を解く必要があり, 計算コストが高い . 非線形  $k$ - $\varepsilon$  モデルであれば, レイノルズ応力輸送モデルほど計算コストを増加させずに, 乱れの非等方性を表現できる可能性がある . ただし, このタイプのモデルの実用例は多くはない .

### 4.9 レイノルズ応力輸送モデル

レイノルズ応力の渦粘性表現を用いる渦粘性モデルには, 流れの非等方性を考慮しにくいという問題がある . 渦粘性表現を用いる代わりに, レイノルズ応力輸送方程式を解いてレイノルズ応力を求めるモデルが提案されている . このタイプのモデルはレイノルズ応力モデル (Reynolds stress model, 略して RSM) あるいはレイノルズ応力輸送モデル (Reynolds stress transport model, 略して RSTM) と呼ばれる .

レイノルズ応力輸送モデルには標準モデルというものはないが, Launder-Reece-Rodi モデル (LRR モデル) が基本的なモデルとして参照される . レイノルズ応力輸送方程式 (29) は, 以下のようにモデル化される .

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(R_{ij} \bar{u}_k) = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} \quad (202)$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} &= -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \\ P_k &= \frac{1}{2} P_{ii} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \\ D_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right\}\end{aligned}\tag{203}$$

定数は

$$C_1 = 1.8, C_2 = 0.6\tag{204}$$

圧力-ひずみ相関項  $\Pi_{ij}$  には、壁が圧力変動を反射する効果を考慮するための壁反射項 (wall reflection term) が付加されることがある。

別途  $\varepsilon$  を式 (93) から求める必要がある。変数の数は、対称テンソルであるレイノルズ応力の 6 成分と  $\varepsilon$  で 7 つなので、レイノルズ応力輸送モデルは 7 方程式モデルである。方程式の数で単純に比較すると、標準  $k$ - $\varepsilon$  モデルの 3 倍以上の計算コストがかかることになる。

レイノルズ応力輸送モデルは、乱れの非等方性を表現できるため、曲率や旋回のある流れなど、複雑な流れに有効である。

## 参考文献

- [1] 白倉昌明, 大橋秀雄: 流体力学 (2), コロナ社 (1969) .
- [2] 吉澤徹: 流体力学, 東京大学出版会 (2001) .
- [3] 数値流体力学編集委員会 編: 数値流体力学シリーズ 3 乱流解析, 東京大学出版会 (1995) .
- [4] 梶島岳夫: 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂 (2007) .
- [5] H. K. Versteeg, W. Malalasekera: 数値流体力学 [第 2 版], 森北出版 (2011).
- [6] 店橋護: 乱流の階層構造とエネルギーカスケード, 数理解析研究所講究録, 第 1601 巻 (2008) .
- [7] O. A. Marzouk and E. D. Huckaby: Simulation of a Swirling Gas-Particle Flow Using Different  $k$ -epsilon Models and Particle-Parcel Relationships, Engineering Letters, 18:1, EL\_18\_1\_07 (2010) .
- [8] V. Yakhot, S. Thangam, T. B. Gatski, S. A. Orszag, C. G. Speziale: Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique, NASA Contractor Report 187611 (1991) .

- [9] F. R. Mentor , M. Kurtz and R. Langtry : Ten Years of Industrial Experience with SST Turbulence Model , Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence , Heat and Mass Transfer (2003) .
- [10] Turbulence Modeling Resource , NASA Langley Research Center , <http://turbmodels.larc.nasa.gov/> .