三角関数の公式

春日 悠

2018 年 1 月 14 日

目 次

1 オイラーの公式

三角関数 (trigonometric function) $\cos\theta$，$\sin\theta$ をそれぞれテーラー展開すると，次のようになる．

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \tag{1}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \tag{2}$$

指数関数 e^x のテーラー展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \tag{3}$$

右辺の項を並び替えると

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \tag{4}$$

虚数単位を i として，$x = i\theta$ とすると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} \cdots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned} \tag{5}$$

したがって，以下の関係が成り立つ．

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \tag{6}$$

これをオイラーの公式という．

2 三角関数の公式

オイラーの公式より

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} \\
&= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta) &= e^{i(\alpha-\beta)} \\
&= e^{i\alpha}e^{-i\beta} \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)) \\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta-i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned} \tag{8}$$

以上より，つぎの加法定理が得られる．

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{10}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{11}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{12}$$

加法定理から，つぎの積和公式が得られる．

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\} \tag{13}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\} \tag{14}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\} \tag{15}$$

積和公式で $\beta=\alpha$ とすると，半角の公式が得られる．

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left\{1+\cos 2\alpha\right\} \tag{16}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \{1 - \cos 2\alpha\} \tag{17}$$

同様に，倍角の公式も得られる．

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned} \tag{18}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tag{19}$$

また，$e^{i\theta}$，$e^{-i\theta}$ とオイラーの公式から，以下の関係が得られる．

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-\theta}}{2} \tag{20}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-\theta}}{2i} \tag{21}$$