三重対角行列アルゴリズム (TDMA)

春日 悠

2011 年 2 月 1 日

目 次

1　はじめに

一次元偏微分方程式を有限差分法や有限体積法で離散化した際、代数方程式の係数行列として対角要素とその両隣の要素のみが非 0 である三重対角行列が得られることがある。この場合、代数方程式の解法としてガウスの消去法よりも効率的な手法が使える。それは三重対角行列アルゴリズム (TDMA: TriDiagonal-Matrix Algorithm) と呼ばれるものである。

2　TDMA

変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての代数方程式を次式のように表す。

$$a_i x_i = b_i x_{i+1} + c_i x_{i-1} + d_i \tag{1}$$

行列で表すと次のようになる (n 元の方程式とする)。

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & -c_i & a_i & -b_i & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & -c_n & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

空白はすべて 0 である。

次の方程式を解くことを考えてみよう。

$$
\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & -c_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{3}
$$

係数行列の 1 行目と $\boldsymbol{x}$ との内積から

$$
a_1 x_1 = b_1 x_2 + d_1 \tag{4}
$$

これより

$$
x_1 = \frac{b_1}{a_1} x_2 + \frac{d_1}{a_1} \tag{5}
$$

ここで、x_i を次式で表すことにしよう。

$$
x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \tag{6}
$$

すると

$$
x_1 = P_1 x_2 + Q_1 \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned} P_1 &= \frac{b_1}{a_1} \\ Q_1 &= \frac{d_1}{a_1} \end{aligned} \tag{8}
$$

続いて、係数行列の 2 行目と $\boldsymbol{x}$ との内積から

$$
a_2 x_2 = b_2 x_3 + c_2 x_1 + d_2 \tag{9}
$$

上式に式 (7) を代入すると

$$
\begin{aligned} a_2 x_2 &= b_2 x_3 + c_2 (P_1 x_2 + Q_1) + d_2 \\ (a_2 - c_2 P_1) x_2 &= b_2 x_3 + d_2 + c_2 Q_1 \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_2 - c_2 P_1} x_3 + \frac{d_2 + c_2 Q_1}{a_2 - c_2 P_1} \end{aligned} \tag{10}
$$

したがって

$$
x_2 = P_2 x_3 + Q_2 \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned} P_2 &= \frac{b_2}{a_2 - c_2 P_1} \\ Q_2 &= \frac{d_2 + c_2 Q_1}{a_2 - c_2 P_1} \end{aligned} \tag{12}
$$

同様に

$$
a_3 x_3 = c_3 x_2 + d_3 \tag{13}
$$

式 (11) を代入して

$$
\begin{aligned}
a_3 x_3 &= c_3(P_2 x_3 + Q_2) + d_3 \\
(a_3 - c_3 P_2) x_3 &= d_3 + c_3 Q_2 \\
x_3 &= \frac{d_3 + c_3 Q_2}{a_3 - c_3 P_2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

したがって

$$x_3 = Q_3 \tag{15}$$

$$Q_3 = \frac{d_3 + c_3 Q_2}{a_3 - c_3 P_2} \tag{16}$$

上記の手順を一般化して、次のアルゴリズムを得る。

TDMA: n 元の代数方程式が次式のように表されるとする。

$$a_i x_i = b_i x_{i+1} + c_i x_{i-1} + d_i \tag{17}$$

このとき、下記の手順によって解 $\boldsymbol{x}$ が求まる。

1. $P_1 \cdots P_{n-1}, Q_1 \cdots Q_n$ を次式から求める。

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{b_1}{a_1} \\
Q_1 &= \frac{d_1}{a_1} \\
P_i &= \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \\
Q_i &= \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2. 次式より解を求める。

$$
\begin{aligned}
x_n &= Q_n \\
x_i &= P_i x_{i+1} + Q_i
\end{aligned}
\tag{19}
$$

参考文献

[1] スハス V. パタンカー, コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985