# テイラー展開

春日 悠

2012 年 10 月 27 日

## 目 次

**1　テイラー展開　1**

## 1　テイラー展開

任意の関数 $f(x)$ を考える。関数 $f(x)$ が次式で表されるとする。

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{1}$$

係数 $a_0, a_1, ...$ を決めていく。まず、$x = a$ として $a_0 = f(a)$。関数 $f(x)$ を $x$ で微分していくと

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\
\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \cdots \\
\frac{d^3f(x)}{dx^3} &= 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \cdots \\
&\cdots \\
\frac{d^nf(x)}{dx^n} &= n!a_n + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{2}$$

それぞれ $x = a$ として

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{df(a)}{dx} \\
a_2 &= \frac{1}{2}\frac{d^2 f(a)}{dx^2} \\
a_3 &= \frac{1}{6}\frac{d^3 f(a)}{dx^3} \\
&\cdots \\
a_n &= \frac{1}{n!}\frac{d^n f(a)}{dx^n} \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{3}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a) &+ \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(a)}{dx^2}(x-a)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(a)}{dx^3}(x-a)^3 + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\frac{d^n f(a)}{dx^n}(x-a)^n + \cdots
\end{aligned} \tag{4}
$$

これを関数 $f(x)$ のテイラー展開と呼ぶ。

また、$a \to x, x \to x + \Delta x$ と置き換えて、次式のように書くこともある。

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x) = f(x) &+ \frac{df(x)}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}\Delta x^n + \cdots
\end{aligned} \tag{5}
$$