スプリッティング法

春日 悠

2015 年 5 月 21 日

目次

1 ADI 法

非定常拡散方程式を考える．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \phi) \tag{1}$$

2 次元で考える．クランク・ニコルソン法で離散化する．

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\delta_x^2 \phi^{n+1} + \delta_y^2 \phi^{n+1} + \delta_x^2 \phi^n + \delta_y^2 \phi^n) \tag{2}$$

ここで δ_x^2，δ_y^2 はラプラシアンをそれぞれ x 方向，y 方向に離散化することを意味する．上式を次のように 2 つの式で表す．

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1/2} - \phi^n}{\Delta t/2} &= \delta_x^2 \phi^{n+1/2} + \delta_y^2 \phi^n \\ \frac{\phi^{n+1} - \phi^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= \delta_x^2 \phi^{n+1/2} + \delta_y^2 \phi^{n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

これは，それぞれ第 1 式は x 方向についての，第 2 式は y 方向についての三重対角方程式になっており，たとえば TDMA (三重対角行列アルゴリズム) でそれぞれ x 方向，y 方向と順に解くことで計算できることを意味している．この方法は ADI (alternating direction implicit) 法 (方向交替陰解法) と呼ばれる．

上の 2 式を足すと，次式になる．

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \delta_x^2 \phi^{n+1/2} + \frac{1}{2}(\delta_y^2 \phi^{n+1} + \delta_y^2 \phi^n) \tag{4}$$

もとの式と比べると，これは次式のように想定していることになる．

$$\delta_x^2\phi^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{n+1} + \delta_x^2\phi^n) \tag{5}$$

この想定による誤差はどの程度だろうか？

次のように書くことが許されるものとする．

$$\phi + \delta_x^2\phi = (1 + \delta_x^2)\phi \tag{6}$$

式 (2) を整理すると，次式のようになる．

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2 - \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2 + \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^n \tag{7}$$

これは次のように書ける．

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^n \\ + \frac{\Delta t^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2(\phi^{n+1} - \phi^n)\end{aligned} \tag{8}$$

右辺第 2 項を無視すると

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^n \tag{9}$$

これは次のように分解できる．

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\phi^* &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^n \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\delta_y^2\right)\phi^{n+1} &= \left(1 + \frac{\Delta t}{2}\delta_x^2\right)\phi^*\end{aligned} \tag{10}$$

ここで $\phi^* = \phi^{n+1/2}$ とおいて整理すると，式 (3) が得られる．

したがって，式 (2) と式 (3) の差は，式 (8) の右辺第 2 項ということになる．この項は，$\phi^{n+1} - \phi^n$ が Δt に比例することから，$O(\Delta t^3)$ である．つまり，式 (3) は時間についてもとのクランク-ニコルソン法と同じ 2 次精度である．

2　スプリッティング法

ADI 法のように，1 つの方程式を複数の式に分解して解く方法は，スプリッティング (splitting) 法あるいは近似因数分解 (approximate factorization) 法と呼ばれる．

より一般化して次式を考える．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = f_1(\phi) + f_2(\phi) \tag{11}$$

これに対して 1 次精度の陰的時間差分を適用する．

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = f_1^{n+1} + f_2^{n+1} \tag{12}$$

これはスプリッティング法により，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{*}-\phi^{n}}{\Delta t}&=f_1^{*}\\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^{*}}{\Delta t}&=f_2^{n+1}\end{aligned}\tag{13}$$

右辺が 3 つに分かれている場合も，同様にして次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{*}-\phi^{n}}{\Delta t}&=f_1^{*}\\ \frac{\phi^{**}-\phi^{*}}{\Delta t}&=f_2^{**}\\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^{*}}{\Delta t}&=f_2^{n+1}\end{aligned}\tag{14}$$

おそらく以上のような発想により，3 次元の ADI 法が次式のように示されている [1].

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{*}-\phi^{n}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{*}+\delta_x^2\phi^{n})+\delta_y^2\phi^{n}+\delta_z^2\phi^{n}\\ \frac{\phi^{**}-\phi^{n}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{*}+\delta_x^2\phi^{n})+\frac{1}{2}(\delta_y^2\phi^{**}+\delta_y^2\phi^{n})+\delta_z^2\phi^{n}\\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{*}+\delta_x^2\phi^{n})+\frac{1}{2}(\delta_y^2\phi^{**}+\delta_y^2\phi^{n})+\frac{1}{2}(\delta_z^2\phi^{n+1}+\delta_z^2\phi^{n})\end{aligned}\tag{15}$$

左辺が 2 次元 ADI 法の式 (3) と少し違った形をしているが，これは以下のように考えればよい．クランク・ニコルソン法の式 (上式第 3 式とほぼ同じ) を分解すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{*}-\phi^{n}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{*}+\delta_x^2\phi^{n})\\ \frac{\phi^{**}-\phi^{*}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_y^2\phi^{**}+\delta_y^2\phi^{*})\\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^{**}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_z^2\phi^{n+1}+\delta_z^2\phi^{**})\end{aligned}\tag{16}$$

上の 3 式を足してもとの式の形になればよいのだから，これは次のように書いてもよい．

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{*}-\phi^{n}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_x^2\phi^{*}+\delta_x^2\phi^{n})+\delta_y^2\phi^{n}+\delta_z^2\phi^{n}\\ \frac{\phi^{**}-\phi^{*}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_y^2\phi^{**}+\delta_y^2\phi^{*})-\delta_y^2\phi^{n}\\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^{**}}{\Delta t}&=\frac{1}{2}(\delta_z^2\phi^{n+1}+\delta_z^2\phi^{**})-\delta_z^2\phi^{n}\end{aligned}\tag{17}$$

上式第 1 式は式 (15) の第 1 式と同じもので，上式第 1 式と第 2 式を足して式 (15) の第 2 式が得られ，上式をすべて足すと式 (15) の第 3 式が得られる．

2 次元 ADI 法と同様にして，3 次元 ADI 法の分割による誤差も $O(\Delta t^3)$ であることが示される．

参考文献

[1] J. Douglas Jr.：Alternating Direction Methods for Three Space Variables，Numerische Mathematik，Vol. 4，pp. 41-63，1962.

[2] J.H. ファーツィーガー，M. ペリッチ：コンピュータによる流体力学，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003.