非圧縮性流体計算の圧力-速度連成手法

春日 悠

2013 年 10 月 27 日

目 次

1　非圧縮性流体の支配方程式

非圧縮性流体の支配方程式を次に示す．

運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot [\nu\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\}] + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{b} \tag{1}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{u}$ は速度ベクトル，p は圧力，$\boldsymbol{b}$ は体積力ベクトル，ρ は密度，μ は粘性係数である．上の 2 式を連立させて解けば非圧縮性流体の挙動がわかるわけだが，連続の式 (2) が圧力を陽に含まないため，これらを解くためには工夫がいる．

運動方程式 (1) を部分的に有限体積法で離散化すると，次式のように表せる．

$$A_P \boldsymbol{u}_P + \sum A_N \boldsymbol{u}_N = -\nabla p + \boldsymbol{s} \tag{3}$$

ここで添え字の P は注目しているセルを表し，N は注目しているセルの隣接セルを表している (図 1)．これは形式的に次式のように書ける．

$$\boldsymbol{u}_P = \frac{\boldsymbol{s} - \sum A_N \boldsymbol{u}_N}{A_P} - \frac{1}{A_P}\nabla p \tag{4}$$

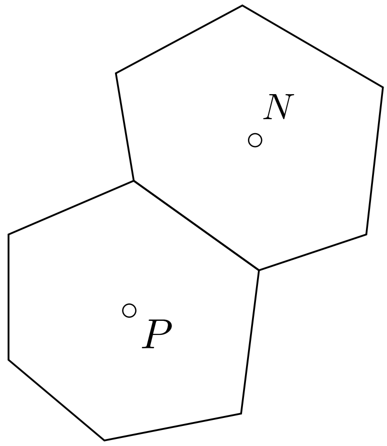

図 1: セル

これを連続の式 (2) に代入すると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_P = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{s} - \sum A_N \boldsymbol{u}_N}{A_P} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p \right) = 0 \tag{5}$$

これより次の圧力方程式を得る．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{s} - \sum A_N \boldsymbol{u}_N}{A_P} \right) \tag{6}$$

式 (3), (6) を解くことで非圧縮性流体の速度と圧力を知ることができる．以下ではこの 2 式を解くためのアルゴリズムを示す．

2 SIMPLE 法

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) 法は式 (3), (6) を解くためのアルゴリズムの 1 つである．

SIMPLE 法では速度 $\boldsymbol{u}$ と圧力 p を反復計算で求める．反復計算におけるある時点での速度 $\boldsymbol{u}$ と圧力 p を，それぞれ予測値 $\boldsymbol{u}^*, p^*$ とその修正値 $\boldsymbol{u}', p'$ の和で表す．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}' \tag{7}$$

$$p = p^* + p' \tag{8}$$

反復の最終段階で予測値が真の解と一致した場合，修正値は 0 になる．上式を式 (3) に代入すると

$$A_P \boldsymbol{u}_P{}^* + \sum A_N \boldsymbol{u}_N{}^* = -\nabla p^* + \boldsymbol{s} - (A_P \boldsymbol{u}_P{}' + \sum A_N \boldsymbol{u}_N{}' + \nabla p') \tag{9}$$

右辺第 3 項は最終的に 0 にならなければならないことから，次式を得る．

$$A_P {\boldsymbol u_P}^* + \sum A_N {\boldsymbol u_N}^* = -\nabla p^* + \boldsymbol s \tag{10}$$

$${\boldsymbol u_P}' = -\frac{\sum A_N {\boldsymbol u_N}'}{A_P} - \frac{1}{A_P}\nabla p' \tag{11}$$

連続の式 (2) より

$$\nabla \cdot \boldsymbol u_P = \nabla \cdot {\boldsymbol u_P}^* + \nabla \cdot {\boldsymbol u_P}' = 0 \tag{12}$$

上式に式 (11) を代入して次式を得る．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p' \right) = \nabla \cdot {\boldsymbol u_P}^* - \nabla \cdot \left(\frac{\sum A_N {\boldsymbol u_N}'}{A_P} \right) \tag{13}$$

この式を解けば圧力の修正値が得られるが，右辺第 2 項が未知である．速度修正値は最後には 0 になるので，右辺第 2 項は無視してしまおう (この項を無視するという決定が ”Semi-Implicit” という名前の由来である)．したがって次の 2 式を得る．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p' \right) = \nabla \cdot {\boldsymbol u_P}^* \tag{14}$$

$${\boldsymbol u_P}' = -\frac{1}{A_P}\nabla p' \tag{15}$$

上式から圧力と速度の修正値が得られる．

SIMPLE 法のアルゴリズムは以下のようになる．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol u^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (14) を解いて圧力の修正値 p' を得る．
3. 式 (15) より速度の修正値 $\boldsymbol u'$ を計算する．
4. 式 (7), (8) より速度 $\boldsymbol u$ と圧力 p を計算する．
5. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

ところで，式 (10) を次式のように表す．

$${\boldsymbol u_P}^* = \tilde{\boldsymbol u}_P^* - \frac{1}{A_P}\nabla p^* \tag{16}$$

ここで $\tilde{\boldsymbol u}_P^*$ は次式で定義される．

$$\tilde{\boldsymbol u}_P^* = \frac{\boldsymbol s - \sum A_N {\boldsymbol u_N}^*}{A_P} \tag{17}$$

式 (16) の発散は

$$\nabla \cdot {\boldsymbol u_P}^* = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol u}_P^* - \nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p^* \right) \tag{18}$$

これを式 (14) に代入すると

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p' \right) = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p^* \right) \tag{19}$$

式 (8) を使うと次式を得る．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* \tag{20}$$

また，式 (7) に式 (16), (15) を代入すると

$$\boldsymbol{u}_P = \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \frac{1}{A_P} \nabla p^* - \frac{1}{A_P} \nabla p' \tag{21}$$

式 (8) を使って次式を得る．

$$\boldsymbol{u}_P = \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \frac{1}{A_P} \nabla p \tag{22}$$

以上から、SIMPLE 法のアルゴリズムは次のように修正値 $\boldsymbol{u}', p'$ を用いない形でも書ける．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (17) により $\tilde{\boldsymbol{u}}^*$ を求める．
3. 式 (20) を解いて圧力 p を得る．
4. 式 (22) より速度 $\boldsymbol{u}$ を計算する．
5. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

SIMPLE 法では式 (13) の右辺第 2 項を無視したことにより圧力の修正値を過大に予測するため，圧力の計算が発散しがちであり，収束も遅い．この問題を回避するために不足緩和が用いられる．速度と圧力に対する緩和係数をそれぞれ α_u, α_P とする．速度の場合，前ステップの速度を $\boldsymbol{u}^{**}$ とすると，緩和係数により次のように計算される．

$${\boldsymbol{u}_P}^* = {\boldsymbol{u}_P}^{**} + \alpha_u \left(\frac{\boldsymbol{s} - \sum A_N {\boldsymbol{u}_N}^*}{A_P} - \frac{1}{A_P} \nabla p^* - {\boldsymbol{u}_P}^{**} \right) \tag{23}$$

すなわち，運動方程式が次式で表される．

$$\frac{A_P}{\alpha_u} {\boldsymbol{u}_P}^* + \sum A_N {\boldsymbol{u}_N}^* = -\nabla p^* + \boldsymbol{s} + (1 - \alpha_u) \frac{A_P}{\alpha_u} {\boldsymbol{u}_P}^{**} \tag{24}$$

圧力の場合は，緩和係数により次式で計算される．

$$p = p^* + \alpha_P p' \tag{25}$$

一般的には $\alpha_u = 0.7, \alpha_P = 0.3$ といった値が用いられるが，最適な値は問題による．

3 SIMPLEC 法

SIMPLE 法の収束性を改善するために，式 (13) で無視した右辺第 2 項を近似的に求めようというのが SIMPLEC (SIMPLE Consistent) 法のアイデアである．

あるセルの速度の修正値 $\boldsymbol{u}_P{}'$ を隣接セルの速度の修正値 $\boldsymbol{u}_N{}'$ の平均値として近似的に求める．

$$\boldsymbol{u}_P{}' \approx \frac{\sum A_N \boldsymbol{u}_N{}'}{\sum A_N} \tag{26}$$

これを式 (11) に代入すると

$$\boldsymbol{u}_P{}' = -\frac{1}{A_P + \sum A_N} \nabla p' \tag{27}$$

上式を式 (12) に代入して次式を得る．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P + \sum A_N} \nabla p' \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{u}_P{}^* \tag{28}$$

式 (13) にあった右辺第 2 項は考慮する必要がなくなる．

SIMPLEC 法のアルゴリズムは以下のようになる．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (28) を解いて圧力の修正値 p' を得る．
3. 式 (27) より速度の修正値 $\boldsymbol{u}'$ を計算する．
4. 式 (7), (8) より速度 $\boldsymbol{u}$ と圧力 p を計算する．
5. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

上記の手順は SIMPLE 法同様に修正値を用いない形で書くことができる．式 (16) の発散を式 (28) に代入すると

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P + \sum A_N} \nabla p' \right) = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p^* \right) \tag{29}$$

式 (8) より上式を次のように書き換える．

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{A_P + \sum A_N} (\nabla p - \nabla p^*) \right\} = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P} \nabla p^* \right) \tag{30}$$

これより

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A_P + \sum A_N} \nabla p \right) = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{A_P + \sum A_N} - \frac{1}{A_P} \right) \nabla p^* \right\} \tag{31}$$

また，式 (7) に式 (16), (27) を代入すると

$$\boldsymbol{u}_P = \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \frac{1}{A_P} \nabla p^* - \frac{1}{A_P + \sum A_N} \nabla p' \tag{32}$$

式 (8) より上式を次のように書き換える．

$$\boldsymbol{u}_P = \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \frac{1}{A_P}\nabla p^* - \frac{1}{A_P + \sum A_N}\left(\nabla p - \nabla p^*\right) \tag{33}$$

これより

$$\boldsymbol{u}_P = \tilde{\boldsymbol{u}}_P^* - \left\{ \frac{1}{A_P + \sum A_N}\nabla p - \left(\frac{1}{A_P + \sum A_N} - \frac{1}{A_P} \right) \nabla p^* \right\} \tag{34}$$

手順は次のようになる．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (17) により $\tilde{\boldsymbol{u}}^*$ を求める．
3. 式 (31) を解いて圧力 p を得る．
4. 式 (34) より速度 $\boldsymbol{u}$ を計算する．
5. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

SIMPLEC 法では SIMPLE 法のような圧力に対する不足緩和は必要ない．

4 SIMPLER 法

SIMPLER (SIMPLE Revised) 法は SIMPLEC 法同様、SIMPLE 法の収束性の問題を取り除くことを目指したアルゴリズムである．圧力の修正値を速度の修正にだけ用い，圧力の修正には用いないというのがそのアイデアである．SIMPLE 法で圧力に対する不足緩和が必要なのは，一部の項を無視することにより圧力の修正値が大きくなるからである．ならば，圧力は流速から直接求め，圧力の修正値は流速の修正値を求めるためだけに用いればよい．

SIMPLER 法のアルゴリズムを以下に示す．

1. 式 (17) により $\tilde{\boldsymbol{u}}_P^*$ を求める．速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (20) を解いて圧力 p を得る．
3. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．
4. 式 (14) を解いて圧力の修正値 p' を得る．
5. 式 (15) より速度の修正値 $\boldsymbol{u}'$ を計算する．
6. 式 (7) より速度 $\boldsymbol{u}$ を計算する．

7. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

上記の手順は SIMPLE 法同様に修正値を用いない形で書くことができる．この場合，圧力を 2 回求めることになる．

1. 式 (17) により $\tilde{\boldsymbol{u}}^*$ を求める．速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (20) を解いて圧力 p を得る．
3. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．
4. 式 (20) を解いて圧力 p を得る．
5. 圧力 p を用いて 式 (22) より速度 $\boldsymbol{u}$ を計算する．
6. 収束解が得られるまで上記の手順を繰り返す．

SIMPLER 法も SIMPLEC 法同様，圧力に対する不足緩和は必要ない．

5 PISO 法

SIMPLE 法を非定常問題に適用する場合，時間ステップごとに反復計算が必要になるため，計算コストが高い．PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) 法は非定常解析用に SIMPLE 法の反復計算を削減したアルゴリズムである．

PISO 法も SIMPLE 法同様に速度と圧力を予測値と修正値の和で表すが，修正値を 1 次修正値 $\boldsymbol{u}', p'$ と 2 次修正値 $\boldsymbol{u}'', p''$ で表す．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}'' \tag{35}$$

$$p = p^* + p' + p'' \tag{36}$$

それぞれを 2 段階で表す．

$$\boldsymbol{u}^{**} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}' \tag{37}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{**} + \boldsymbol{u}'' \tag{38}$$

$$p^{**} = p^* + p' \tag{39}$$

$$p = p^{**} + p'' \tag{40}$$

これらを式 (3) に代入すると

$$\begin{aligned}A_P\boldsymbol{u}_P{}^* + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}^* &= -\nabla p^* + \boldsymbol{s} \\ &\quad - \left(A_P\boldsymbol{u}_P{}' + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}' + \nabla p' + A_P\boldsymbol{u}_P{}'' + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}'' + \nabla p''\right)\end{aligned} \tag{41}$$

上式を 2 つの段階に分けて解く．

$$A_P\boldsymbol{u}_P{}^* + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}^* = -\nabla p^* + \boldsymbol{s} - \left(A_P\boldsymbol{u}_P{}' + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}' + \nabla p'\right) \tag{42}$$

$$A_P\boldsymbol{u}_P{}^{**} + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}^{**} = -\nabla p^{**} + \boldsymbol{s} - \left(A_P\boldsymbol{u}_P{}'' + \sum A_N\boldsymbol{u}_N{}'' + \nabla p''\right) \tag{43}$$

右辺第 3 項は最終的に 0 にならなければならないことから，次式を得る．

$$\boldsymbol{u}_P{}' = -\frac{\sum A_N\boldsymbol{u}_N{}'}{A_P} - \frac{1}{A_P}\nabla p' \tag{44}$$

$$\boldsymbol{u}_P{}'' = -\frac{\sum A_N\boldsymbol{u}_N{}''}{A_P} - \frac{1}{A_P}\nabla p'' \tag{45}$$

速度 $\boldsymbol{u}^{**}, \boldsymbol{u}$ がそれぞれ連続の式 (2) を満たすとすると

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p'\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^* - \nabla\cdot\left(\frac{\sum A_N\boldsymbol{u}_N{}'}{A_P}\right) \tag{46}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p''\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^{**} - \nabla\cdot\left(\frac{\sum A_N\boldsymbol{u}_N{}''}{A_P}\right) \tag{47}$$

SIMPLE 法同様に右辺第 2 項を無視することにすると

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p'\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^* \tag{48}$$

$$\boldsymbol{u}_P{}' = -\frac{1}{A_P}\nabla p' \tag{49}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p''\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^{**} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{u}_P{}'' = -\frac{1}{A_P}\nabla p'' \tag{51}$$

運動方程式を解くのは $\boldsymbol{u}^*$ についてだけで，$\boldsymbol{u}^{**}$ については $\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u}'$ から求める．式 (50) に 式 (37) を代入すると

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p''\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^* + \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}' \tag{52}$$

上式に式 (44) を代入すると

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p''\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{u}_P{}^* - \nabla\cdot\left(\frac{\sum A_N\boldsymbol{u}_N{}'}{A_P}\right) - \nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p'\right) \tag{53}$$

式 (48) より次式を得る．

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{A_P}\nabla p''\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{\sum A_N \boldsymbol{u}_N{}'}{A_P}\right) \tag{54}$$

つまり PISO 法は、SIMPLE 法で無視した式 (13) の右辺第 2 項 (上式の右辺) を考慮するために修正値の計算を 2 回に分けているのである．依然 2 次修正値の項は無視しているが、1 次修正値の項を無視するよりは影響が小さいと考えられる．

PISO 法のアルゴリズムは以下のようになる．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の時間ステップで得られた値を用いる．
2. 式 (48) を解いて圧力の 1 次修正値 p' を得る．
3. 式 (49) より速度の 1 次修正値 $\boldsymbol{u}'$ を計算する．
4. 式 (37), (39) より $\boldsymbol{u}^{**}, p^{**}$ を計算する．
5. 式 (50) を解いて圧力の 2 次修正値 p'' を得る．
6. 式 (51) より速度の 2 次修正値 $\boldsymbol{u}''$ を計算する．
7. 式 (38), (40) より速度 $\boldsymbol{u}$ と圧力 p を計算する．
8. 次の時間ステップへ進む．

PISO 法も SIMPLE 法同様に修正値を用いない形で表すことができる．また、2 度の修正値の計算で解く式の形は同じなので，変数を使いまわすことでループにすることができる．ループにできるならば，なにも 2 回で計算をやめる理由はない．というわけで、PISO 法のアルゴリズムは次のようにも書ける．

1. 式 (10) を解いて速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を得る．圧力の予測値 p^* には前回の反復計算で得られた値を用いる．
2. 式 (17) により $\tilde{\boldsymbol{u}}_P^*$ を求める．
3. 式 (20) を解いて圧力 p を得る．
4. 式 (22) より速度 $\boldsymbol{u}$ を計算する．
5. $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}^*$ として，上の 3 つの手順を必要なだけ繰り返す (ふつうは 2 回で十分).
6. 次の時間ステップへ進む．

PISO 法も SIMPLEC 法や SIMPLER 法同様，圧力に対する不足緩和は必要ない．

参考文献

[1] J.H. ファーツィガー, M. ペリッチ: コンピュータによる流体力学, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003).

[2] スハス V. パタンカー: コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版 (1985).

[3] R. Yin and W.K. Chow: Comparison of four algorithms for solving pressure-velocity linked equations in simulating atrium fire, International Journal on Architectural Science, Volume 4, Number 1, p.24-35 (2003).