板の理論

春日 悠

2020 年 3 月 7 日

目 次

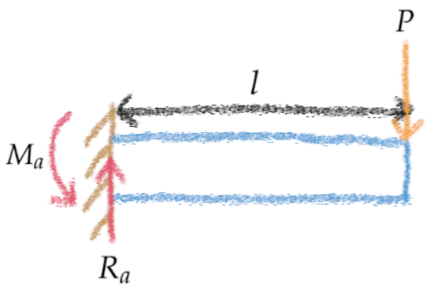

図 1: はりにかかる力

1　はじめに

はりのたわみの方程式の導出方法をベースにして，板のたわみの方程式を導く．

2　はりのたわみ

2.1　はりにかかる力

図 1 のように，一端が固定され，もう一端に荷重 P が作用する長さ l のはりを考える．はりは奥行きに対称な断面を持つものとし，力は対称面に作用するものとする．つまり，はりは 1 次元で考えて良い．まず，固定端にかかる反力を考える．鉛直方向の反力を R_a とすると，力のつりあいから

$$R_a = P \tag{1}$$

モーメント反力を M_a とすると，力のモーメントのつりあいから

$$M_a = Pl \tag{2}$$

である．

はりに力がかかる時，はりの内部にはせん断力と曲げモーメントが作用している (図 2)．せん断力と曲げモーメントの符号は，変形方向に凸になるときに図 3 のような方向を正とする．座標軸ははりの長手方向に x，はりの変形方向に y とする．任意の位置 x において，仮想的な断面を考え，その断面の左側から右側にかかるせん断力 Q と曲げモーメント M を考える．断面右側の下に凸に変形する部分の左端を考えるので，図 3 から Q，M は図 2 の方向になる．断面左側の鉛直方向にかかる力は R_a なので，Q は

$$Q = R_a = P \tag{3}$$

である．また，断面左側にかかる力のモーメントは M_a と R_a によるものがあるので，M は

$$M = R_a x - M_a = -P(l - x) \tag{4}$$

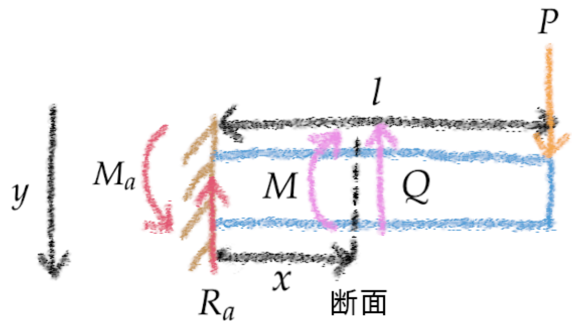

図 2: はりにかかる力 (断面左側から右側へ)

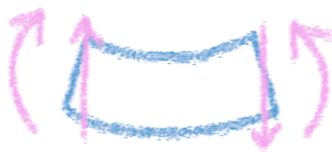

図 3: せん断力と曲げモーメントの正方向

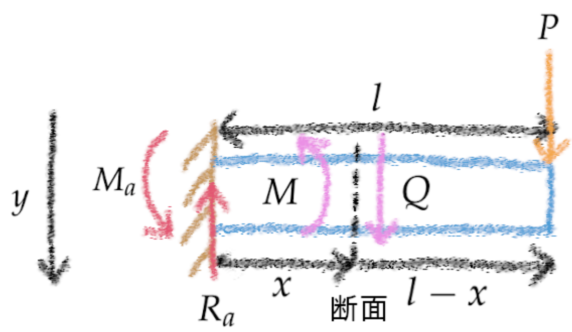

図 4: はりにかかる力 (断面右側から左側へ)

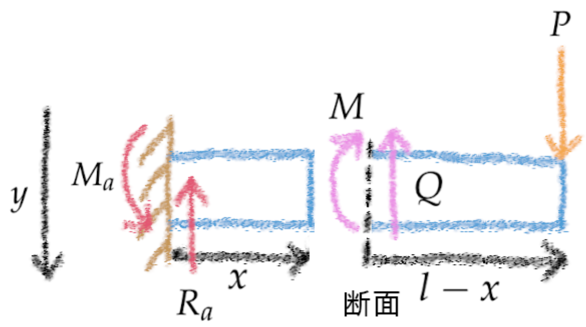

図 5: はりにかかる力 (仮想的な切断)

である．

断面右側から左側に作用する力を考えてもよい (図 4)．この場合はこちらの方が簡単である．今度は断面左側の下に凸に変形する部分の右端を考えるので，Q と M の符号が逆さまになる．断面右側の鉛直方向にかかる力は P なので，Q は単純に

$$Q = P \tag{5}$$

である．また，断面右側にかかる力のモーメントは P によるものだけなので，M は

$$M = -P(l - x) \tag{6}$$

でよい．

また，断面で仮想的にはりを切断してしまって，その部分でつりあいを考えてもよい (図 5)．すると，この場合はもっと直接的に

$$Q = P \tag{7}$$

$$M = -P(l - x) \tag{8}$$

が得られる．

2.2 せん断力と曲げモーメント

はりの微小部分にかかるせん断力と曲げモーメントを考える (図 6)．幅 dx で曲げモーメント M は変化しているがせん断力 Q は変化していない状況を考える．力のモーメントのつりあいを考えると，次式を得る．

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{9}$$

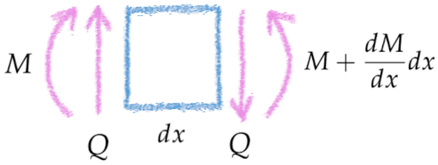

図 6: はりににかかるせん断力と曲げモーメント

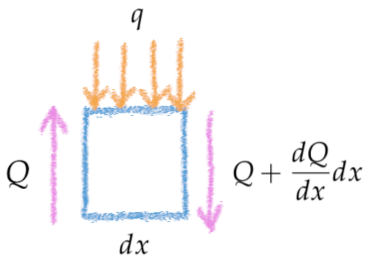

図 7: はりににかかるせん断力と分布荷重

また，微小部分にかかる分布荷重 q とせん断力を考える (図 7)．今度は分布荷重によりせん断力 Q は変化する．力のつりあいを考えると

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{10}$$

式 (9) を代入すると

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \tag{11}$$

2.3 はりのひずみと応力

はり内部のひずみと応力を考えるために，せん断力が 0 である ”単純曲げ” (pure bending) を考える．以下の仮定を置く．

- 微小変形を仮定する．
- 軸力はないものとする．
- はりの高さ方向の中心断面には応力がかからないものとする．
- はりの水平断面と垂直断面のなす角度は変形によって変わらないものとする．

応力のかからない，はりの高さ方向の中心断面のことを中立面 (neutral surface) という．

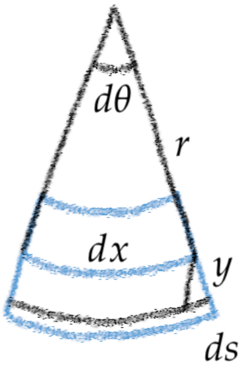

図 8: はりのひずみ

はりが下に凸に変形した場合の微小部分を考える (図 8)．変形後の中立面の線は，左右の垂直断面の線を上に延長したときに交わる点を中心とした円弧になっていると考える．円弧の半径を r，角度を $d\theta$ とすると

$$dx = rd\theta \tag{12}$$

半径 r を曲率半径という．中立面から下に y だけ下がったところの水平断面の変形後の形状を考える．延びを ds とすると

$$ds = (r + y)d\theta - dx = yd\theta \tag{13}$$

である．これより，x 方向のひずみ ε_x は次式で表される．

$$\varepsilon_x = \frac{ds}{dx} = \frac{y}{r} \tag{14}$$

したがって，x 方向の応力は

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ey}{r} \tag{15}$$

ここで E はヤング率である．

曲げモーメントは，応力を高さ方向に面積で積分すると得られる．

$$M = \int \sigma_x y dA = \frac{EI_z}{r} \tag{16}$$

ここで

$$I_z = \int y^2 dA \tag{17}$$

は断面二次モーメントと呼ばれる．

たとえば，図 9 のような矩形断面の場合は

$$I_z = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} \tag{18}$$

である．

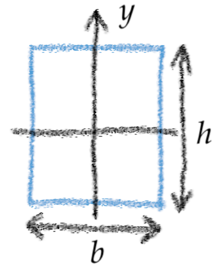

図 9: 矩形断面の断面二次モーメント

曲率半径の逆数である曲率は，次式で表される．

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \tag{19}$$

ここで，EI_z をはりの曲げ剛性という．これより，ひずみと応力は

$$\varepsilon_x = \frac{My}{EI_z} \tag{20}$$

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \tag{21}$$

最大応力と最小応力は，それぞれ次のように表すことができる．

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{Z} \tag{22}$$

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{M}{Z} \tag{23}$$

ここで

$$Z = \frac{2I_z}{h} \tag{24}$$

は断面係数という．

2.4 はりのたわみ

はりのたわみ曲線について考える (図 10)．変形後のはりの接線と x 軸とがなす角を θ として，はりの微小部分を ds，角度の変化を $d\theta$，曲率半径を r とすると，ds は次式で表される．

$$ds = rd\theta \tag{25}$$

曲率を正とすると

$$\frac{1}{r} = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \tag{26}$$

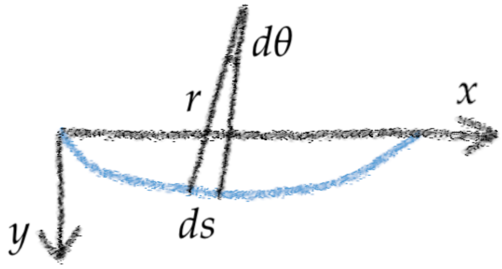

図 10: はりのたわみ

s の正方向を x の正方向にとると，角度 θ は減少傾向なので

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\theta}{ds} \tag{27}$$

はりのたわみ量 (y 方向変位) を v とする．変形は小さいとすると $ds = dx$，$\theta = \tan\theta = dv/dx$ とみなせるので

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2v}{dx^2} \tag{28}$$

式 (14)，(15) より

$$\varepsilon_x = -y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29}$$

$$\sigma_x = -Ey\frac{d^2v}{dx^2} \tag{30}$$

はりの長手方向の変形量 (x 方向変位) を u とすると

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{31}$$

より

$$u = -y\frac{dv}{dx} \tag{32}$$

また，式 (19)，(28) より，次式が得られる．

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \tag{33}$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{Q}{EI_z} \tag{34}$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI_z} \tag{35}$$

これらの式を，はりのたわみ曲線の微分方程式という．

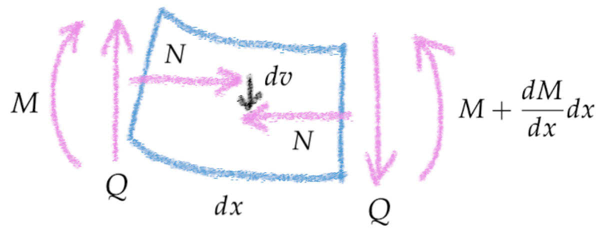

図 11: はりにかかる軸力

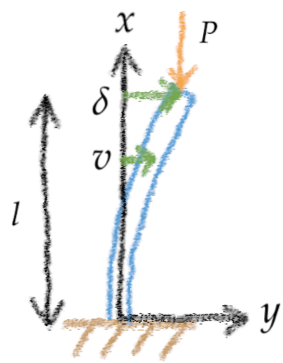

図 12: はりの座屈

2.5　軸力による変形

はりを圧縮するように長手方向に押す場合，数学的に厳密な軸力になっている場合は縮むだけだが，実際にやってみるとすぐにたわむ．これを座屈という．座屈を考えるために，たわみがあるときの軸力について考える．

図 11 のように，たわんだ梁の微小部分に軸力 N が作用している状況を考える．力のモーメントのつりあいを考えると

$$\frac{dM}{dx} = Q + N\frac{dv}{dx} \tag{36}$$

である．分布荷重は働いていないとすると，式 (33) を 1 回微分したものに上式を代入し，もう一度微分すると，次式のたわみ曲線の方程式が得られる．

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{N}{EI_z}\frac{d^2v}{dx^2} \tag{37}$$

図 12 のように，垂直に立った長さ l のはりの軸方向に圧縮力 P がかかるときの問題を考える．$x = l$ でのたわみ量を δ とする．式 (36) において $N = P$，$Q = 0$ とすると

$$M = Pv + C \tag{38}$$

である．C は積分定数である．$x = 0$ で $v = 0$ なので $C = -P\delta$ である．すなわち

$$M = -P(\delta - v) \tag{39}$$

これを式 (33) に代入して，次式を得る．

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = P(\delta - v) \tag{40}$$

上のたわみ曲線の方程式を解くと，たわみ曲線は

$$v = \delta(1 - \cos kx) \tag{41}$$

ここで

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{42}$$

である．$x = l$ で $v = \delta$ なので

$$\delta = \delta(1 - \cos kl) \tag{43}$$

これより次式を得る．

$$\delta \cos kl = 0 \tag{44}$$

$\delta = 0$ の場合には興味がないので，上式を満たす条件は次のようになる．

$$\begin{gathered} kl = (2n-1)\frac{\pi}{2} \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{gathered} \tag{45}$$

これが座屈が起こる条件である．これを満たす荷重 $P_c r$ を臨界荷重と呼び，次のようになる．

$$P_{cr} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2 EI_z}{4l^2} \tag{46}$$

荷重が臨界荷重に達すると座屈が起こる．δ は不定である．座屈変形形状を見たい場合は次式を描けばよい．

$$v = c(1 - \cos kx) \tag{47}$$

ここで，c は任意の定数である．

3　板のたわみ

3.1　板のたわみ

図 13 のような厚み t の平板を考える．z 軸を下向きにとり，その正方向のたわみ量 (z 方向変位) を w とする．はりと同様の仮定が成り立つと考える．x，y 方向の変位 u，v は次式で表される．

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{48}$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{49}$$

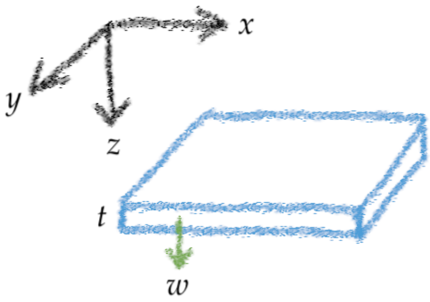

図 13: 板

これより，ひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{50}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{51}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{52}$$

ベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \tag{53}$$

これを単純化して次のように書く．

$$\{\varepsilon\} = -z\{w''\} \tag{54}$$

　応力は，平面応力状態を考える．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{55}$$

ここで ν はポアソン比である．単純化して次のように書く．

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \tag{56}$$

これより

$$\{\sigma\} = -z[E]\{w''\} \tag{57}$$

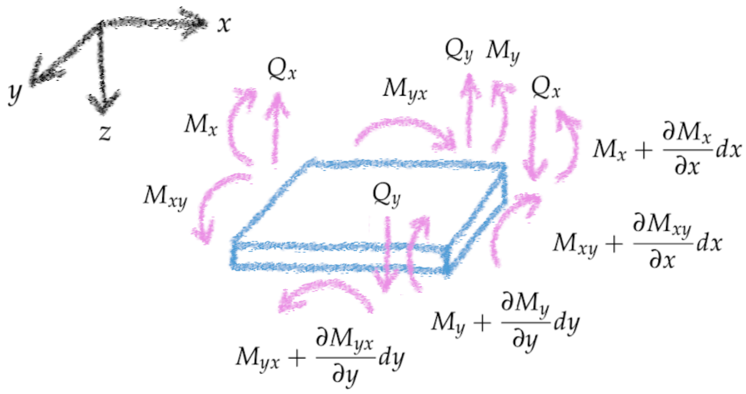

図 14: 板にかかるせん断力と曲げモーメント

板の微小部分にかかる曲げモーメントを図 14 のように考える．ただし $M_{xy} = M_{yx}$ である．曲げモーメントをベクトルで次のように表す．

$$\{M\} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \tag{58}$$

曲げモーメントは次式のように表される．

$$\{M\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma\} z dz = -[E]\{w''\} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \tag{59}$$

これは次のように書ける．

$$\{M\} = -[D]\{w''\} \tag{60}$$

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{61}$$

ここで

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{62}$$

を板の曲げ剛性という．

分布荷重はないものとして，板の微小部分にせん断力と曲げモーメントが 図 14 のようにかかっているものとする．力のモーメントのつりあいを考えると

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \tag{63}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_y \tag{64}$$

また，分布荷重 q を考えた場合は，Q_x，Q_y が変化するものとして，力のつりあいにより

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \tag{65}$$

となる．これらにより

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \tag{66}$$

上式に式 (60) を代入すると，次式の板のたわみ曲面の方程式を得る．

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{q}{D} \tag{67}$$

ここでは剛性に分布がないものと仮定した．

3.2 軸力による変形

板に分布荷重の代わりに軸力がかかる場合を考える．x 方向の軸力を N_x とすると，はりと同様に次式のようになる．

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{68}$$

参考文献

[1] チモシェンコ：材料力学 上巻，東京図書 (1957).

[2] 栖原二郎: 平板の曲げ理論，培風館，(1972).