偏微分方程式の型

春日 悠

2012 年 10 月 27 日

目 次

1　偏微分方程式の型

2 階の偏微分方程式

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\cdots=0 \tag{1}$$

はつぎの 3 つの型に分類される。

- $B^2-4AC<0$　楕円型
- $B^2-4AC=0$　放物型
- $B^2-4AC>0$　双曲型

2　楕円型

楕円型の典型は、ラプラス方程式である。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

一般的に定常問題の支配方程式となり、境界条件を必要とする。

3　放物型

放物型の典型は、拡散方程式である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{3}$$

一般的に非定常問題の支配方程式となり、境界条件と初期条件を必要とする。解の空間的な広がりかたに方向性がなく、時間変化は大域的である。

4　双曲型

双曲型の典型は、波動方程式である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{4}$$

これを微分演算について因数分解すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \tag{5}$$

因数分解の１つ目の式は移流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

である。

一般的に非定常問題の支配方程式となり、境界条件と初期条件を必要とする。解の空間的な広がりかたに方向性があり、時間変化は局所的である。

5　混合型

上記の型が混ざった混合型の方程式もある。移流拡散方程式は放物型と双曲型の混合型である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{7}$$

この場合、移流項が卓越すれば双曲型、拡散項が卓越すれば放物型の特徴が現れる。

参考文献

[1] 神部勉, 理工学者が書いた数学の本 偏微分方程式, 講談社, 1987

[2] 日本計算工学流れの有限要素法研究委員会 編, 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, 2008