ナビエ・ストークス方程式

春日 悠

2016 年 2 月 23 日

目 次

1 レイノルズの輸送定理

物体 B があるとする．時刻 t に B の占める領域を Ω とする．空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ として，B 上のある量を $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ としよう．ϕ はスカラーでもベクトルでもテンソルでもよい．ϕ の体積積分の物質時間導関数を，次式で定義する．

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega}\phi(\boldsymbol{x},t)dv = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{\Omega'}\phi(\boldsymbol{x},t+\Delta t)dv - \int_{\Omega}\phi(\boldsymbol{x},t)dv\right) \tag{1}$$

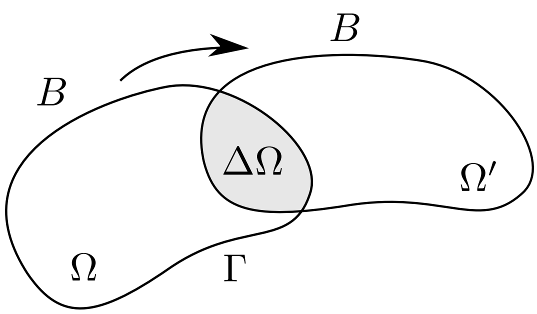

図 1: 物体の運動

ここで Ω' は時刻 $t+\Delta t$ において B が占める領域を表す (図 1)．$\Delta\Omega = \Omega' - \Omega$ とすると，$\Omega' = \Omega + \Delta\Omega$ なので

$$\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\int_\Omega \phi(\boldsymbol{x},t)dv \\ &\quad = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\left(\int_\Omega \phi(\boldsymbol{x},t+\Delta t)dv - \int_\Omega \phi(\boldsymbol{x},t)dv\right) + \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{\Delta\Omega}\phi(\boldsymbol{x},t+\Delta t)dv\right)\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

右辺の最後の項は，B の境界面 Γ 上の各点が Δt の間に通過した体積に ϕ をかけたものの総和に等しいと考えられる．B の速度を $\boldsymbol{u}$ とし，Γ の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，Γ 上の微小面積 ds が通過した体積は $dv = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dtds$ と書けるので

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \phi dv = \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}dv + \int_\Gamma \phi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds \tag{3}$$

右辺第 2 項にガウスの発散定理を適用して

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \phi dv = \int_\Omega \left\{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{u})\right\}dv \tag{4}$$

上式をレイノルズの輸送定理という．

2 質量保存の法則

物体 B の密度を $\rho(\boldsymbol{x},t)$ とする．B の質量を m とすると

$$m = \int_\Omega \rho dv \tag{5}$$

質量保存の法則は $\dot{m} = 0$ と表される．レイノルズの輸送定理 (式 (4)) を用いて

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{D}{Dt}\int_\Omega \rho dv \\ &= \int_\Omega \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\right\}dv \\ &= 0\end{aligned} \tag{6}$$

これより，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \tag{7}$$

上式を連続の式という．これは次のようにも書ける．

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{8}$$

非圧縮性流体の場合，流体の密度は時間的に変化しない ($D\rho/Dt = 0$) ため，連続の式は次のように表される．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{9}$$

非圧縮性流体だからといって $\partial\rho/\partial t = 0$ とは限らない (密度分布が一様である必要はない) ことに注意。

3　運動方程式

物体 B にかかる外力 $\boldsymbol{f}$ は，表面力を $\boldsymbol{t}$，物体力を $\boldsymbol{b}$ とすると，次式のように書ける．

$$\boldsymbol{f} = \int_\Gamma \boldsymbol{t} ds + \int_\Omega \boldsymbol{b} dv \tag{10}$$

応力テンソルを σ とし，B の境界面 S の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，コーシーの公式

$$\boldsymbol{t} = \sigma \cdot \boldsymbol{n} \tag{11}$$

より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \int_\Gamma \sigma \cdot \boldsymbol{n} ds + \int_\Omega \boldsymbol{b} dv \\ &= \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b})\, dv \end{aligned} \tag{12}$$

ガウスの発散定理を用いた．

運動方程式は，運動量を $\boldsymbol{p}$ とすると

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f} \tag{13}$$

と表される．運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \int_\Omega \rho \boldsymbol{u} dv \tag{14}$$

であるので，レイノルズの輸送定理 (式 (4)) を用いて

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{D}{Dt} \int_\Omega \rho \boldsymbol{u} dv \\ &= \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \right\} dv = \boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{15}$$

式 (13) に式 (12) と (15) を代入すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = \nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b} \tag{16}$$

上式の左辺は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{u} + \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) + \rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \\ &= \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) \right\} \boldsymbol{u} + \rho \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right\} \\ &= \rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} \end{aligned} \tag{17}$$

連続の式および以下の関係を用いた．

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{18}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{19}$$

以上より，運動方程式は次のようにも書ける．

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b} \tag{20}$$

4 角運動量保存の法則

座標系の原点に関する物体 B の角運動量保存の法則は，次式のように表される．

$$\frac{D}{Dt} \int_\Omega \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{u} dv = \int_\Gamma \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} ds + \int_\Omega \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} dv \tag{21}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は，ϵ_{ijk} をエディントンのイプシロン

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i,j,k \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (i,j,k \text{ のうちどれか } 2 \text{ つが等しい}) \end{cases} \tag{22}$$

とすると，総和規約を用いて $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \boldsymbol{e}_i$ と表される．ここで $\boldsymbol{e}_i$ は座標系の基底ベクトルである．式 (21) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} ds &= \int_\Gamma \boldsymbol{x} \times \sigma \cdot \boldsymbol{n} ds \\ &= \int_\Gamma \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \boldsymbol{e}_i ds \\ &= \epsilon_{ijk} \int_\Gamma x_j \sigma_{kl} n_l ds \boldsymbol{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl}) dv \boldsymbol{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} \int_\Omega \left(\delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dv \boldsymbol{e}_i \\ &= \int_\Omega \left(\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \boldsymbol{e}_i + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \boldsymbol{e}_i \right) dv \\ &= \int_\Omega \left(\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{x} \times \nabla \cdot \sigma \right) dv \end{aligned} \tag{23}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{24}$$

である．また，ガウスの発散定理を用いた．

したがって式 (21) は，レイノルズの輸送定理を用いて

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \times \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \right\} dv = \boldsymbol{x} \times \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b})\, dv + \int_\Omega \epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\boldsymbol{e}_i dv \\
\boldsymbol{x} \times \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) - \nabla \cdot \sigma - \boldsymbol{b} \right\} dv = \int_\Omega \epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\boldsymbol{e}_i dv
\end{aligned}
\tag{25}
$$

左辺は運動方程式によって 0 なので，次式が得られる．

$$
\int_\Omega \epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\boldsymbol{e}_i dv = 0 \tag{26}
$$

これから

$$
\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \tag{27}
$$

上式より

$$
\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = \epsilon_{ikj}\sigma_{kj} = -\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0 \tag{28}
$$

したがって

$$
\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} \tag{29}
$$

上式が成り立つには $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ でなければならない．つまり，応力テンソル σ は対称である．

5　ニュートン流体の構成方程式

せん断応力が変形速度に比例すると想定できる流体を，ニュートン流体という．ここでは，ニュートン流体の構成方程式を導く．

変形速度テンソル D は，速度勾配テンソル L の対称成分を表す．

$$
\begin{aligned}
L &= \nabla \boldsymbol{u} \\
D &= \frac{1}{2}(L + L^T)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

せん断応力テンソル τ と変形速度テンソル D の関係は，次式で表される．

$$
\tau_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \tag{31}
$$

静止流体の場合，圧力を p とすると，静水圧の等方性より応力テンソル σ は次式のように書ける．

$$
\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{32}
$$

運動する流体の場合は，上式にせん断応力が加わるから

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \\
&= -p\delta_{ij} + C_{ijkl} D_{kl}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

流体が等方であるとしよう．そのとき，テンソル C は等方テンソルである．4 階の等方テンソル C の成分 C_{ijkl} は，次式のように表すことができる．

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{34}$$

ここで，スカラー μ, λ はそれぞれ粘性係数，第 2 粘性係数と呼ばれる．上式を用いて，応力と変形速度の関係は次式のようになる．

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \left\{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right\} D_{kl} \\
&= -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}D_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl}D_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}D_{kl}) \\
&= -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + \mu(D_{ij} + D_{ji}) \\
&= -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}
\end{aligned} \tag{35}$$

テンソル形式で表示すると

$$\sigma = -pI + \lambda(\mathrm{tr}D)I + 2\mu D \tag{36}$$

ここで I は単位テンソル，$\mathrm{tr}D = D_{ii}$ は D のトレースである．上式を速度で表すと

$$\begin{aligned}
\sigma &= -pI + \lambda(\mathrm{tr}L)I + \mu(L + L^T) \\
&= -pI + \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}I + \mu\left\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right\}
\end{aligned} \tag{37}$$

ここで $\mathrm{tr}L = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ を用いた．

平均垂直応力 $\sigma_{kk}/3$ が体積ひずみ速度 D_{kk} と無関係であると仮定すると

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)D_{kk} \tag{38}$$

より

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{39}$$

これをストークスの仮説という．これより次式を得る．

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{40}$$

これを式 (37) に代入すると

$$\sigma = -pI - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}I + \mu\left\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right\} \tag{41}$$

ところで，偏差応力 σ' は

$$\begin{aligned}
\sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \\
&= -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)D_{kk}\delta_{ij} \\
&= -\frac{2}{3}\mu D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \\
\boldsymbol{\sigma}' &= -\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}I + \mu\left\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right\}
\end{aligned} \tag{42}$$

つまり，ストークスの仮説は，せん断応力が偏差応力で表されると仮定するということである．

6　ナビエ・ストークス方程式

運動方程式 (16) に構成方程式 (41) を代入すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right\}\right] - \nabla\left(\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{b} \tag{43}$$

上式はニュートン流体の支配方程式であり，ナビエ・ストークス方程式と呼ばれる．

粘性係数 μ が場所に依存しないとすると，$\nabla \cdot \sigma$ の成分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\} \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}
\end{aligned} \tag{44}$$

これより

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{45}$$

これを運動方程式 (16) に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} \tag{46}$$

非圧縮性流体の場合，連続の式 (9) を式 (43) に適用し，両辺を密度で割ると，次式が得られる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot \left[\nu\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right\}\right] + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{b} \tag{47}$$

ここで $\nu = \mu/\rho$ を動粘性係数という．粘性係数 μ が定数なら，式 (46) より

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{b} \tag{48}$$

参考文献

[1] Y.C. ファン：連続体の力学入門 改訂版，培風館 (1980).

[2] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善 (1992).

[3] 石原繁：テンソル -科学技術のために-，裳華房 (1991).