混相流モデル

春日 悠

2018 年 6 月 2 日

目 次

1 はじめに

気体，液体，固体といった複数の相 (phase) が混在する混相流 (multiphase flow) の物理モデルについて整理する. ここでは，相界面の挙動を直接計算せず，物理量の平均値を変数とする多流体モデル (multi-fluid model) を考える.

2 多流体モデル

2.1 各相内での保存式

混相流の各相内ではそれぞれ保存式が成立する. それぞれの相を示す添え字を i とすると，連続の式と運動方程式は次のように表される.

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i) = -\nabla p_i + \nabla \cdot \tau_i + \rho_i \boldsymbol{g} \tag{2}$$

ここで，t は時刻，ρ_i，$\boldsymbol{u}_i$，p_i，τ_i はそれぞれ相 i の密度，速度，圧力，せん断応力，$\boldsymbol{g}$ は重力加速度である．

2.2 平均化と相界面

多流体モデルは平均化操作を用いて導出する．関数 f の体積平均を次式で表す．

$$\overline{f} = \frac{1}{V}\int_V f dv \tag{3}$$

時刻 t において，位置 $\boldsymbol{x}$ が相 i により占められているとき 1，そうでないときは 0 となるような関数を $X(t, \boldsymbol{x})$ とすると，相 i の体積分率 α_i は次式で定義できる．

$$\alpha_i = \overline{X_i} \tag{4}$$

平均操作には，次の関係が成り立つ．

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(X_i f_i)} = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{X_i f_i}) \tag{5}$$

$$\overline{\nabla(X_i f_i)} = \nabla(\overline{X_i f_i}) \tag{6}$$

相界面の挙動について次式が成り立つ．

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{iI} \cdot \nabla X_i = 0 \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{iI}$ は相 i の界面速度である．相界面以外の場所では X_i の時間微分，空間微分は 0 なので，上式は相界面以外の場所でも成り立つ．

2.3 多流体モデル

多流体モデルの導出を行う．まず，連続の式について考える．連続の式の両辺に X_i をかけて変形すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(X_i \rho_i) + \nabla \cdot (X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i) = \rho_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla X_i \right) \tag{8}$$

上式の右辺から式 (7) の左辺に ρ_i を乗じたものを引いて平均化すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{X_i \rho_i}) + \nabla \cdot (\overline{X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i}) = \overline{\rho_i (\boldsymbol{u}_{iI} - \boldsymbol{u}_i) \cdot \nabla X_i} \tag{9}$$

以下の平均量を定義する．

$$f_{i\alpha} = \frac{\overline{X_i f_i}}{\alpha_i} \tag{10}$$

$$f_{i\rho} = \frac{\overline{X_i \rho_i f_i}}{\alpha_i \rho_{i\alpha}} \tag{11}$$

これらを式 (9) に代入すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_{i\alpha}) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_{i\alpha} \boldsymbol{u}_{i\rho}) = \Gamma_i \tag{12}$$

右辺の Γ_i は相変化量を表し，次式で表される．

$$\Gamma_i = \overline{\rho_i (\boldsymbol{u}_{iI} - \boldsymbol{u}_i) \cdot \nabla X_i} \tag{13}$$

運動方程式についても連続の式同様に考える．運動方程式の両辺に X_i をかけて変形すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i) + \nabla \cdot (X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i) = & - \nabla (X_i p_i) + \nabla \cdot (X_i \tau_i) + X_i \rho_i \boldsymbol{g} \\ & + \rho_i \boldsymbol{u}_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla X_i \right) + p_i \nabla X_i - \tau_i \cdot \nabla X_i \end{aligned} \tag{14}$$

右辺の $p_i \nabla X_i$，$\tau_i \cdot \nabla X_i$ は，X_i の空間微分が相界面以外の場所では 0 になるので，それぞれ $p_{iI} \nabla X_i$，$\tau_{iI} \cdot \nabla X_i$ と書ける．上式の右辺から式 (7) の左辺に ρ_i を乗じたものを引いて平均化すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i}) + \nabla \cdot (\overline{X_i \rho_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i}) = & - \nabla (\overline{X_i p_i}) + \nabla \cdot (\overline{X_i \tau_i}) + \overline{X_i \rho_i \boldsymbol{g}} \\ & + \overline{[\rho_i \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{u}_{iI} - \boldsymbol{u}_i) + p_{iI} I - \tau_{iI}] \cdot \nabla X_i} \end{aligned} \tag{15}$$

上式に式 (10)，式 (11) を代入すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \boldsymbol{u}_{i\rho}) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_{i\alpha} \boldsymbol{u}_{i\rho} \boldsymbol{u}_{i\rho}) = -\nabla (\alpha_i p_{i\alpha}) + \nabla \cdot (\alpha_i \tau_{i\alpha}) + \alpha_i \rho_{i\alpha} \boldsymbol{g} + \tilde{M}_i \tag{16}$$

右辺の $\tilde{M}_i$ は運動量輸送項で，次式で表される．

$$\tilde{M}_i = \overline{[\rho_i \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{u}_{iI} - \boldsymbol{u}_i) + p_{iI} I - \tau_{iI}] \cdot \nabla X_i} \tag{17}$$

運動量輸送項 $\tilde{M}_i$ は，物理的考察から次のように表される．

$$\tilde{M}_i = \Gamma_i \boldsymbol{u}_{iI} + p_{iI} \nabla \alpha_i + M_i \tag{18}$$

右辺の各項は，相変化による運動量輸送量，界面において静圧により働く力，抗力などその他の力を表す．これより，運動方程式は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \boldsymbol{u}_{i\rho}) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_{i\alpha} \boldsymbol{u}_{i\rho} \boldsymbol{u}_{i\rho}) = & - \alpha_i \nabla p_{i\alpha} + \nabla \cdot (\alpha_i \tau_{i\alpha}) + \alpha_i \rho_{i\alpha} \boldsymbol{g} \\ & + \Gamma_i \boldsymbol{u}_{iI} + (p_{iI} - p_{i\alpha}) \nabla \alpha_i + M_i \end{aligned} \tag{19}$$

3　多流体モデルの解法

3.1　支配方程式

多流体モデルの解法について，OpenFOAM v1712 の twoPhaseEulerFoam，reactingMultiphaseEulerFoam を参照して整理する．

連続の式と運動方程式を以下のように表す．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) = -\alpha_i\nabla p + \nabla\cdot(\alpha_i\tau_i) + \alpha_i\rho_i\boldsymbol{g} + M_i \tag{21}$$

ここで，相変化は無視し，圧力は全ての相で同じとした．なお，平均を表す添え字の α や ρ は省略した．

3.2　速度の物質時間導関数

運動方程式の左辺は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) = \\ \alpha_i\rho_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\boldsymbol{u}_i\right) + \boldsymbol{u}_i\left[\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

右辺第 1 項は物質時間導関数の項である．右辺第 2 項は連続の式で 0 になるはずであるが，数値計算では一般に 0 にはならない．連続の式の誤差を E_i で表すと，上式は次のように表せる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) = \alpha_i\rho_i\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} + E_i\boldsymbol{u}_i \tag{23}$$

これより，速度の物質時間導関数 $D\boldsymbol{u}_i/Dt$ は次式で表される．

$$\alpha_i\rho_i\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) - E_i\boldsymbol{u}_i \tag{24}$$

物質時間導関数のほうを基本的と考えると，運動方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i) + \nabla\cdot(\alpha_i\rho_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) - E_i\boldsymbol{u}_i = \\ -\alpha_i\nabla p_i + \nabla\cdot(\alpha_i\tau_i) + \alpha_i\rho_i\boldsymbol{g} + M_i\end{aligned} \tag{25}$$

3.3　圧力-速度連成

運動方程式を半離散化した式を次式で表す．

$$A_i\boldsymbol{u}_i = H_i - \alpha_i\nabla p + S_i \tag{26}$$

A_i は係数，S_i は外力や相間の力などのソース項，H_i は圧力勾配項とソース項以外の項である．これを速度について形式的に解くと，次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{H_i + S_i}{A_i} - \frac{\alpha_i}{A_i} \nabla p \tag{27}$$

連続の式を次式のように考える．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \boldsymbol{u}_i) = E_i \tag{28}$$

E_i は連続の式の誤差である．これを変形すると次式を得る．

$$\alpha_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla \rho_i \right) = E_i - \rho_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) \right] \tag{29}$$

もとの連続の式に立ち戻って，変形すると次式のようになる．

$$\alpha_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla \rho_i \right) + \rho_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) \right] = 0 \tag{30}$$

密度 ρ_i の時間微分について，圧力変化の項を考慮するように置き換える．

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \to \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \psi_i \frac{\partial p}{\partial t} \tag{31}$$

ここで，ψ_i は $\psi_i = \rho_i / p$ と表される熱力学的関数である．これより，次式を得る．

$$\alpha_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla \rho_i \right) + \alpha_i \psi_i \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) \right] = 0 \tag{32}$$

上式について，すべての相で和をとると，次式のようになる．

$$\sum_i \frac{1}{\rho_i} \left[\alpha_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \nabla \rho_i \right) + \alpha_i \psi_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right] + \sum_i \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) = 0 \tag{33}$$

ここで，$\sum_i \alpha_i = 1$ なので，$\sum_i \partial \alpha_i / \partial t = \partial (\sum_i \alpha_i) / \partial t = 0$ である．上式に式 (27)，式 (29) を代入すると，次式のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sum_i \frac{1}{\rho_i} \left\{ E_i - \rho_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) \right] + \alpha_i \psi_i \frac{\partial p}{\partial t} \right\} \\
&\qquad + \sum_i \left[\nabla \cdot \left(\alpha_i \frac{H_i + S_i}{A_i} \right) - \nabla \cdot \left(\alpha_i \frac{\alpha_i}{A_i} \nabla p \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{34}$$

整理して

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\sum_i \alpha_i \frac{\alpha_i}{A_i} \nabla p \right) &= \nabla \cdot \left(\sum_i \alpha_i \frac{H_i + S_i}{A_i} \right) \\
&\quad + \sum_i \frac{1}{\rho_i} \left\{ E_i - \rho_i \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) \right] + \alpha_i \psi_i \frac{\partial p}{\partial t} \right\}
\end{aligned} \tag{35}$$

これを解くと，圧力が得られる．

各相の速度は，圧力から式 (27) で求められる．また，平均速度は，次式で求められる．

$$\boldsymbol{u} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{u}_i = \sum_i \alpha_i \frac{H_i + S_i}{A_i} - \sum_i \alpha_i \frac{\alpha_i}{A_i} \nabla p \tag{36}$$

3.4 重力の扱い

OpenFOAM では，圧力として静水圧を引いたものを解く．

$$p' = p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} \tag{37}$$

単相流の場合，圧力勾配項と重力項を次のように変形する．

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} &= -\nabla p' - \nabla(\rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}) + \rho \boldsymbol{g} \\ &= -\nabla p' - (\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}) \nabla \rho - \rho \boldsymbol{g} + \rho \boldsymbol{g} \\ &= -\nabla p' - (\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}) \nabla \rho \end{aligned} \tag{38}$$

混相流の場合，次のようになる．

$$\begin{aligned} -\alpha_i \nabla p + \alpha_i \rho_i \boldsymbol{g} &= \alpha_i(-\nabla p + \rho \boldsymbol{g}) + \alpha_i(\rho_i - \rho)\boldsymbol{g} \\ &= -\alpha_i \nabla p' + \alpha_i[-(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x})\nabla \rho + (\rho_i - \rho)\boldsymbol{g}] \end{aligned} \tag{39}$$

上で述べた圧力方程式の p を p' に置き換え，上式の右辺の重力項を S_i の中に入れればよい．

3.5 抗力

相間の抗力は次式のように表せる．

$$M_i = \sum_j K_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) \tag{40}$$

K_{ij} の表現には様々なモデルが存在する．

3.6 体積分率

体積分率の挙動は，次式を解いて求める．

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}_i) = 0 \tag{41}$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha_i \boldsymbol{u}_i &= \alpha_i \sum_j \alpha_j \boldsymbol{u}_i \\ &= \alpha_i \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \boldsymbol{u}_i \\ &= \alpha_i(\boldsymbol{u} - \sum_{j \neq i} \alpha_j \boldsymbol{u}_j) + \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \boldsymbol{u}_i \\ &= \alpha_i \boldsymbol{u} + \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j) \end{aligned} \tag{42}$$

と変形すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \left(\alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \boldsymbol{u}_{r,ij} \right) = 0 \tag{43}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{r,ij} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j$ である.OpenFOAM では体積分率を求めるために上式を解いている．

参考文献

[1] 秋山守，有冨正徳：新しい気液二相流数値解析 - 多次元流動解析 -，コロナ社 (2002).

[2] 片岡勲：気液二相流のモデリングと基礎方程式，混相流，4 巻，4 号 (1990).