物体の運動の表示
(ラグランジュとオイラー)

春日 悠

2009 年 3 月 28 日

目 次

1 ラグランジュとオイラー

ある日、自宅を出たら、家の前の通りで駅伝大会が行われており、わけがわからぬまま いつのまにか道端で旗を振らされている、という状況を考えよう (私の実体験です)。

さて、駅伝大会の観戦のパターンを 3 つ考えてみる。1 つは、テレビで見るように、優勝候補の選手や先頭の選手に張り付いて、彼らと一緒に移動しながら観戦するパターン。2 つ目は、駅伝にまったく興味がない私のように、道端につっ立ってただ旗を振りながら、目の前を次々と横切る走者を眺めるというもの。3 つ目は、ある特定の選手を特に熱心に応援したい場合、ある地点で選手がやってくるのを待ち、現れたらしばらく一緒に走って応援する、というものである。

ここで、駅伝の走者を、それぞれ物体を構成する点であるとみなそう。駅伝ではなく、物体の運動を見ているのだとしよう。テレビカメラや道端で応援する人は、運動の観測者である。このとき、走者とともに移動するテレビカメラのように、物体の点とともに移動する観測者から見た場合の運動の表示を物質表示、あるいはラグランジュ表示という。目の前を次々と横切る選手を応援する道端の人のように、空間に固定した観測者から見た運動の表示を空間表示、あるいはオイラー表示という。また、はじめはじっとしていて、目当ての走者が現れたら一緒にしばらく走って応援する人のように、止まったり動いたりする観測者から見た運動の表示を任意オイラー・ラグランジュ(Arbitrary Lagrangian Eulerian、略して ALE) 表示という。

粒子の運動や固体の変形のようなものの記述には、ラグランジュ表示が使われる。流体の運動や流体中の物質の濃度拡散のように、物質の点の相対位置が大きく変わるよ

うな現象の記述には、オイラー表示が使われる。ALE 表示は、流体中の移動境界問題の記述などに用いられる。

2　物質時間導関数

物質表示か空間表示かが特に問題となるのは、物体を構成する点における量の時間変化を表す場合である。ここではその問題について考えよう。

運動する物体 B があるとする。ある時点を時間 $t=0$ と定め、そのときの B を構成する点の位置ベクトルを $\boldsymbol{X}$ としよう。B を構成する点に対して、「$t=0$ で位置 $\boldsymbol{X}$ にあったもの」という意味で、点 $\boldsymbol{X}$ という言い方をする。つまり、$\boldsymbol{X}$ を点のラベルとして使う。B が移動や変形をしていくとして、時間 t における点 $\boldsymbol{X}$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ とする。

物体 B に関する量 ϕ を考える。ここで ϕ は、スカラーでもベクトルでもテンソルでもかまわないが、とりあえずスカラーということにしておく。ϕ の物質表示を $\phi(\boldsymbol{X},t)$、空間表示を $\phi(\boldsymbol{x},t)$ とする。

物質表示 $\phi(\boldsymbol{X},t)$ の時間導関数

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t} \tag{1}$$

を物質時間導関数という。ϕ の微小変化 $d\phi$ は、$\boldsymbol{x}$ が時間の関数であることに注意して

$$d\phi=\frac{\partial \phi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}dt=\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}dt+\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

よって、ϕ の物質時間導関数は、空間表示によって以下のように表される。

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}=\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{x},t) \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{u}$ は点 $\boldsymbol{X}$ の移動速度

$$\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \tag{4}$$

である。式 (3) の右辺第 1 項を非定常項、第 2 項を移流項、あるいは対流項という。

物質時間導関数を ALE 表示で表すことを考えよう。そのために、任意に移動したり止まったりする座標系を想定する。その座標系の原点の位置ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ とし、その移動速度を $\bar{\boldsymbol{u}}_0$ としよう。その座標系から見た物体 B の点 $\boldsymbol{X}$ の時間 t における位置ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t)$ とする。このとき $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{x}}_0$ であるので、$\bar{\boldsymbol{x}}$ の移動速度を $\bar{\boldsymbol{u}}$ とすると

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{u}}_0 \tag{5}$$

から

$$\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}_0 \tag{6}$$

である。量 ϕ の微小変化 $d\phi$

$$d\phi=\frac{\partial \phi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}dt=\frac{\partial \phi(\bar{\boldsymbol{x}},t)}{\partial t}dt+\nabla\phi(\bar{\boldsymbol{x}},t)\cdot d\bar{\boldsymbol{x}} \tag{7}$$

より、ALE 表示による物質時間導関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \phi(\bar{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \phi(\bar{\boldsymbol{x}}, t) \\
&= \frac{\partial \phi(\bar{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}_0) \cdot \nabla \phi(\bar{\boldsymbol{x}}, t)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

上式において、$\bar{\boldsymbol{u}}_0 = \boldsymbol{u}$ とすれば物質表示の表現が得られ、$\bar{\boldsymbol{u}}_0 = 0$ とすれば空間表示の表現が得られる。

量 ϕ の物質導関数を

$$
\frac{D\phi}{Dt} \tag{9}
$$

と表すことがある。この場合、ϕ はどの表示であってもよい。ϕ が物質表示であるならば

$$
\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{10}
$$

とし、空間表示であれば

$$
\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi \tag{11}
$$

ALE 表示であれば

$$
\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}_0) \cdot \nabla \phi \tag{12}
$$

とする。

参考文献

[1] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992