

固気混相流モデル

春日 悠

2018年6月23日

目次

1	はじめに	1
2	固気混相流の支配方程式	2
2.1	連続の式	2
2.2	運動方程式	2
3	粒状流れの運動論	2
3.1	グラニューラー温度	2
3.2	固体圧力	3
3.3	固体粘性	3
3.4	グラニューラーエネルギー拡散係数	4
3.5	グラニューラーエネルギーの散逸と生成	5
3.6	動径分布関数	6
3.7	摩擦応力	7
3.8	相間交換係数	8
3.9	グラニューラー温度の代数的解法	10
4	固相が複数ある場合	11
4.1	運動方程式	11
4.2	固体圧力	12
4.3	動径分布関数	12
4.4	摩擦応力	13
4.5	固体相間交換係数	14

1 はじめに

粒状 (granular) の固体を含む気体の流れの理論モデル (KTGF: kinetic theory of granular flow) について整理する。主に Wachem の論文^[1]を参考にする。

2 固気混相流の支配方程式

2.1 連続の式

固気混相流の連続の式は次の通りである．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (2)$$

ここで， α_g ， α_s はそれぞれ気体，固体の体積分率で $\alpha_g + \alpha_s = 1$ である． ρ_g ， ρ_s はそれぞれ気体，固体の密度， \mathbf{u}_g ， \mathbf{u}_s はそれぞれ気体，固体の速度である．

2.2 運動方程式

固気混相流の運動方程式は次の通りである．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) = -\alpha_g \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_g \tau_g) + \beta(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_g) + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = -\alpha_s \nabla p + \nabla \cdot \tau_s - \nabla p_s + \beta(\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s) + \alpha_s \rho_s \mathbf{g} \quad (4)$$

$$\tau_g = \mu_g \left[\nabla \mathbf{u}_g + \nabla (\mathbf{u}_g)^T \right] - \frac{2}{3} \mu_g \nabla \cdot \mathbf{u}_g \mathbf{I} \quad (5)$$

$$\tau_s = \mu_s \left[\nabla \mathbf{u}_s + \nabla (\mathbf{u}_s)^T \right] + \left(\lambda_s - \frac{2}{3} \mu_s \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_s \mathbf{I} \quad (6)$$

ここで， β は相間の運動量交換係数あるいは抗力係数 (drag coefficient)， \mathbf{g} は重力加速度である． p は全相共通の圧力である．Syamlal ら [3] は p を気相の圧力 p_g としている．

3 粒状流れの運動論

3.1 グラニユラー温度

熱力学的温度とのアナロジーから，グラニユラー温度 Θ を固体速度変動 \mathbf{u}'_s により次のように定義する．

$$\Theta = \frac{1}{3} \overline{\mathbf{u}'_s \cdot \mathbf{u}'_s} \quad (7)$$

上付きバーは平均操作を表す．グラニユラーエネルギーのバランスから次式が得られる．

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s \Theta) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \Theta \mathbf{u}_s) \right] = (-p_s \mathbf{I} + \tau_s) : \nabla \mathbf{u}_s + \nabla \cdot (k_s \nabla \Theta) - \gamma_s - J_s \quad (8)$$

ここで γ_s は固体粒子同士の非弾性衝突によるエネルギー散逸, J_s は固体粒子の変動速度を通して気体から加えられる変動力 (fluctuating force) によるエネルギーの散逸あるいは生成である. 右辺第 1 項は, 文献により p_s に ∇ が付いたり付かなかったりしているが, 流体の内部エネルギーの式と比べると, ∇ が付かないのが正しいと考えられる.

グラニュラー温度 Θ を 0 から生成する機構はないので, 初期値か境界条件で値を与える必要がある. 一般的に 10^{-4} などの小さな値が用いられる.

3.2 固体圧力

固体圧力は Lun らにより次式で表されている [2].

$$p_s = \alpha_s \rho_s \Theta + 2\alpha_s^2 \rho_s g_0 (1+e) \Theta \quad (9)$$

ここで, g_0 は動径分布関数 (radial distribution function), e は反発係数 (restitution coefficient) である. 右辺第 1 項は運動の影響を, 第 2 項は衝突の影響を表す.

Syamlal らは, 右辺第 1 項を除いた次式を提案している [3].

$$p_s = 2\alpha_s^2 \rho_s g_0 (1+e) \Theta \quad (10)$$

3.3 固体粘性

固体の体積粘性 (bulk viscosity) λ_s は, Lun らにより次式で表されている [2].

$$\lambda_s = \frac{4}{3} \alpha_s^2 \rho_s d_s g_0 (1+e) \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}} \quad (11)$$

ここで, d_s は固体粒子の径である.

固体のせん断粘性 (shear viscosity) μ_s については, 次のように表される.

$$\mu_s = \mu_{s,col} + \mu_{s,kin} \quad (12)$$

右辺第 1 項は衝突に関するもので, 次式で表される.

$$\mu_{s,col} = \frac{4}{5} \alpha_s^2 \rho_s d_s g_0 (1+e) \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}} \quad (13)$$

右辺第 2 項は運動に関するもので, いくつかのモデルが提案されている.

Syamlal et al. モデル [3]

$$\mu_{s,kin} = \frac{\alpha_s \rho_s d_s \sqrt{\pi \Theta}}{6(3-e)} \left[1 + \frac{2}{5} (1+e)(3e-1) \alpha_s g_0 \right] \quad (14)$$

Gidaspow モデル [4]

$$\mu_{s,dil} = \frac{5}{96} \rho_s d_s \sqrt{\pi \Theta} \quad (15)$$

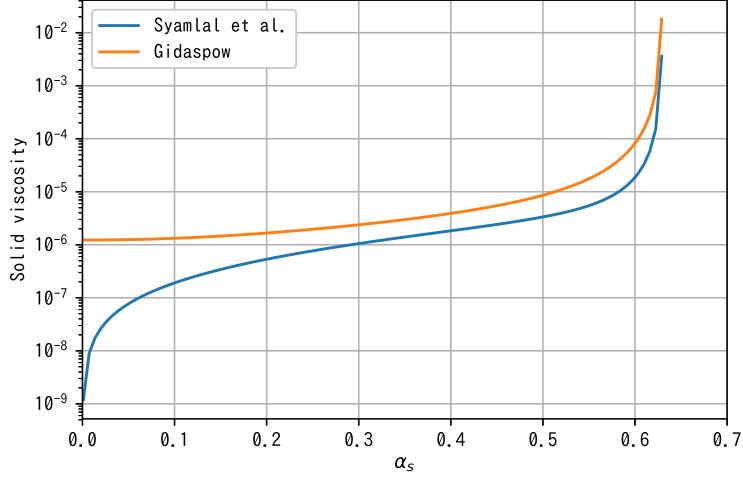


図 1: 固体粘性

$$\begin{aligned}\mu_{s,\text{kin}} &= \frac{2\mu_{s,\text{dil}}}{(1+e)g_0} \left[1 + \frac{4}{5}(1+e)\alpha_s g_0 \right]^2 \\ &= \frac{10\rho_s d_s \sqrt{\pi\Theta}}{96(1+e)g_0} \left[1 + \frac{4}{5}(1+e)\alpha_s g_0 \right]^2\end{aligned}\quad (16)$$

固体体積分率に対して各モデルの値をプロットしたものを図 1 に示す. ここでは $e = 0.5$, $\rho_s = 1$, $d_s = 10^{-5}$, $\Theta = 1$, 動径分布関数は Lun-Savage 式を用いた.

3.4 グラニュラーエネルギー拡散係数

グラニュラーエネルギーの拡散係数 k_s は, いくつかのモデルが提案されている. Syamlal et al. モデル^[3]

$$k_s = \frac{15\alpha_s \rho_s d_s \sqrt{\pi\Theta}}{4(41 - 33\eta)} \left[1 + \frac{12}{5}\eta^2(4\eta - 3)\alpha_s g_0 + \frac{16}{15\pi}(41 - 33\eta)\eta\alpha_s g_0 \right] \quad (17)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(1+e) \quad (18)$$

Gidaspow モデル^[4]

$$k_{s,\text{dil}} = \frac{15}{4}\mu_{s,\text{dil}} = \frac{75}{384}\rho_s d_s \sqrt{\pi\Theta} \quad (19)$$

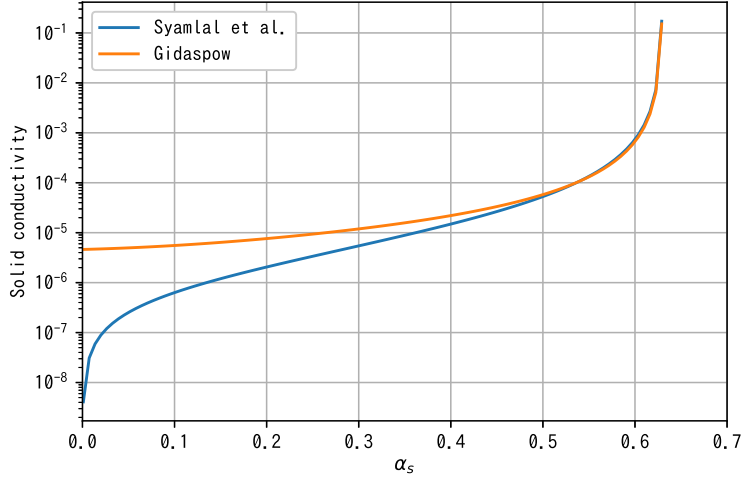


図 2: グラニューラーエネルギー拡散係数

$$\begin{aligned}
 k_s &= \frac{2k_{s,dil}}{(1+e)g_0} \left[1 + \frac{6}{5}(1+e)\alpha_s g_0 \right]^2 + 2\alpha_s^2 \rho_s d_s (1+e) \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}} \\
 &= \frac{150\rho_s d_s \sqrt{\pi\Theta}}{384(1+e)g_0} \left[1 + \frac{6}{5}(1+e)\alpha_s g_0 \right]^2 + 2\alpha_s^2 \rho_s d_s (1+e) \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

固体体積分率に対して各モデルの値をプロットしたものを図 2 に示す。

グラニューラーエネルギーの拡散係数は、単純に固体伝導率 (solid conductivity) などと呼ばれることもあるが、固体の熱伝導のものと混乱しそうなので、グラニューラーエネルギーの拡散係数とか、グラニューラー温度の伝導率などとしたほうがよいと思う。

3.5 グラニューラーエネルギーの散逸と生成

粒子の衝突によるグラニューラーエネルギーの散逸 γ_s は、Lun らにより次のように表されている [2]。

$$\gamma_s = \frac{12(1-e^2)\alpha_s^2 \rho_s g_0 \Theta}{d_s} \sqrt{\frac{\Theta}{\pi}} \tag{21}$$

気体の変動力によるエネルギー散逸あるいは生成 J_s は、次式で表される [1]。

$$J_s = \beta \left(3\Theta - \frac{\beta d_s (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s)^2}{4\alpha_s \rho_s \sqrt{\pi\Theta}} \right) \tag{22}$$

Gidaspow のモデルでは右辺第 2 項が無視されている [4]。

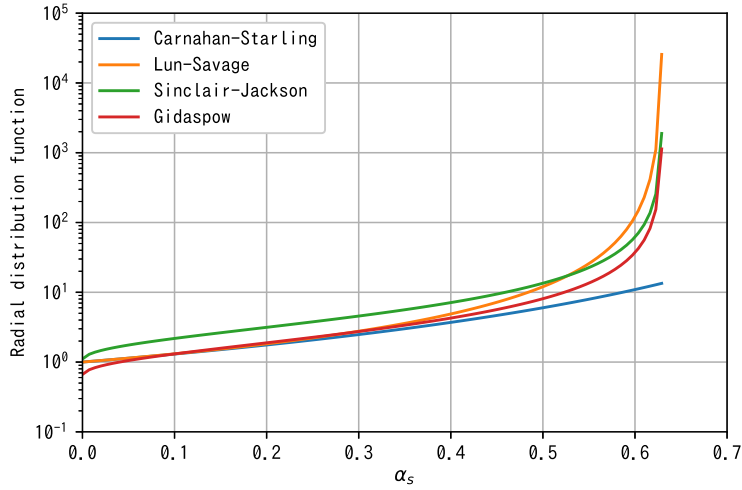


図 3: 動径分布関数

3.6 動径分布関数

動径分布関数 g_0 にはいくつかの式が提案されている。

Carnahan-Starling 式

$$g_0 = \frac{1}{1 - \alpha_s} + \frac{3\alpha_s}{2(1 - \alpha_s)^2} + \frac{\alpha_s^2}{2(1 - \alpha_s)^3} \quad (23)$$

Lun-Savage 式

$$g_0 = \left(1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_{s,\max}}\right)^{-2.5\alpha_{s,\max}} \quad (24)$$

Sinclair-Jackson 式 (Ogawa-Umemura-Oshima 式)

$$g_0 = \left[1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,\max}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} \quad (25)$$

Gidaspow 式 [4]

$$g_0 = \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,\max}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} \quad (26)$$

ここで, $\alpha_{s,\max}$ は最密充填率 (packing limit) である (0.63 くらいの値が使われる)。

固体体積分率に対して各モデルの値をプロットしたものを図 3 に示す。ここでは $\alpha_{s,\max} = 0.63$ とした。Carnahan-Starling 式は, 固体の体積分率が最密充填率に近づいても無限大に近づかない。それ以外は細密充填率に向けて無限大に近づく (計算上問題になるので対処が必要)。OpenFOAM では Sinclair-Jackson 式のみ摩擦最密充填率で制

限をかけている) . Gidaspow 式が分子シミュレーションの結果に最も近いらしいが , 固体率が 0 でも 1 にならないので問題があるようである .

0.1 あたりで Carnahan-Starling 式あるいは Lun-Savage 式と Gidaspow 式を切り替えたらどうなのだろう ?

3.7 摩擦応力

固体の体積分率が高い場合 , 摩擦応力を考慮する必要がある . 摩擦応力を次のように考える .

$$\sigma_{s,\text{fric}} = p_{s,\text{fric}}I + \mu_{s,\text{fric}} \left[\nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T \right] \quad (27)$$

固体の体積分率が限界値 $\alpha_{s,\text{min}}$ を超えた時 , 固体圧力 , 固体粘性で摩擦の項を考慮する .

$$\begin{aligned} p_s &= p_{s,\text{kin}} + p_{s,\text{fric}} \\ \mu_s &= \mu_{s,\text{col}} + \mu_{s,\text{kin}} + \mu_{s,\text{fric}} \end{aligned} \quad (28)$$

Syamlal らは , 摩擦応力が働くときは運動や衝突による応力は働かないものとしている [3] .

$$\begin{aligned} p_s &= \begin{cases} p_{s,\text{fric}} & \text{if } \alpha_s \geq \alpha_{s,\text{min}} \\ p_{s,\text{kin}} & \text{if } \alpha_s < \alpha_{s,\text{min}} \end{cases} \\ \mu_s &= \begin{cases} \mu_{s,\text{fric}} & \text{if } \alpha_s \geq \alpha_{s,\text{min}} \\ \mu_{s,\text{col}} + \mu_{s,\text{kin}} & \text{if } \alpha_s < \alpha_{s,\text{min}} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

この方法だと , 摩擦開始点で固体圧力が不連続になる .

Johnson と Jackson は , 摩擦圧力として次式を提案している .

$$p_{s,\text{fric}} = \text{Fr} \frac{(\alpha_s - \alpha_{s,\text{min}})^n}{(\alpha_{s,\text{max}} - \alpha_s)^p} \quad (30)$$

ここで , $\alpha_{s,\text{min}}$ は摩擦最密充填率 , Fr , n , p は実験定数である . それぞれ $\alpha_{s,\text{min}} = 0.5 - 0.6$, Fr = 0.05 , $n = 2$, $p = 5$ 程度の値が用いられる . FLUENT は Fr = $0.1\alpha_s$ としているようである .

摩擦粘性は , クーロンによる次式が用いられる .

$$\mu_{s,\text{fric}} = p_{s,\text{fric}} \cos \phi \quad (31)$$

ここで , ϕ 内部摩擦角である .

Syamlal らは別のモデルを採用している [3] . 摩擦圧力は次式で表している .

$$\begin{aligned} p_{s,\text{fric}} &= \alpha_s p^* \\ p^* &= A(\alpha_s - \alpha_{s,\text{min}})^n \end{aligned} \quad (32)$$

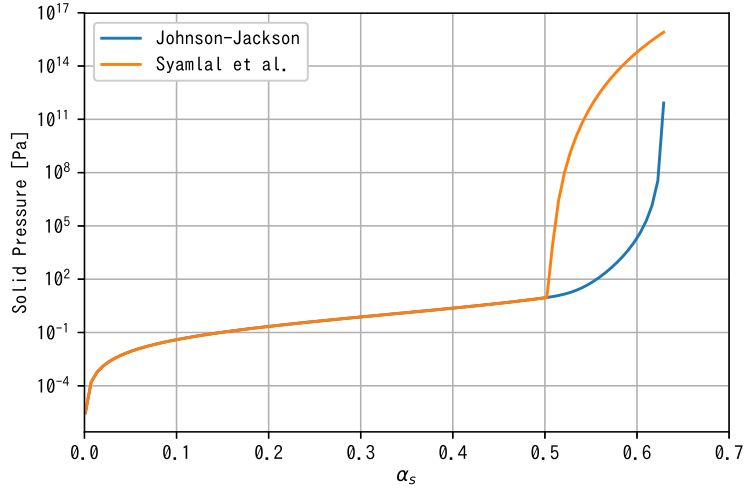


図 4: 摩擦圧力を含んだ固体圧力

ここで $A = 10^{25}$, $n = 10$ が用いられる．Wachem の引用 [1] では $p_{s,\text{fric}} = p^*$ としている．

摩擦粘性は，Schaeffer の議論 [5] から導出しているようである．

$$\mu_{s,\text{fric}} = \frac{p^* \sin \phi}{2\sqrt{I_{2D}}} \quad (33)$$

ここで， I_{2D} は偏差ひずみ速度テンソルの第 2 不変量である．

$$I_{2D} = \frac{1}{6} \left[(D_{s11} - D_{s22})^2 + (D_{s22} - D_{s33})^2 + (D_{s33} - D_{s11})^2 \right] + D_{s12}^2 + D_{s23}^2 + D_{s31}^2 \quad (34)$$

$$D_s = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T \right] \quad (35)$$

この D_s は偏差ではない普通のひずみ速度テンソルであるが，摩擦応力の時点で体積ひずみを考慮していないためであろう． I_{2D} を偏差応力テンソルの第 2 不変量としている文献があるが，それだと次元が合わない．

固体体積分率に対して各モデルの摩擦圧力を含んだ固体圧力の値をプロットしたものを図 4 に示す．ここでは $\alpha_{s,\text{min}} = 0.5$ としている．

3.8 相間交換係数

気体-固体相間の運動量の交換係数 (interphase exchange coefficient) あるいは抗力係数 (drag coefficient) β には，いくつかのモデルが提案されている．

Ergun モデル

$$\beta = 150 \frac{\alpha_s(1 - \alpha_g)\mu_g}{\alpha_g d_s^2} + 1.75 \frac{\rho_g \alpha_s}{d_s} |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s| \quad (36)$$

Wen-Yu モデル

$$\beta = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_g \alpha_s \alpha_g}{d_s} |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s| \alpha_g^{-2.65} \quad (37)$$

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_s} [1 + 0.15 Re_s^{0.687}] & \text{if } Re_s < 1000 \\ 0.44 & \text{if } Re_s \geq 1000 \end{cases} \quad (38)$$

$$Re_s = \alpha_g \frac{\rho_g d_s |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s|}{\mu_g} \quad (39)$$

Gidaspow モデル^[4]

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\text{Ergun}} & \text{if } \alpha_g \leq 0.8 \\ \beta_{\text{Wen-Yu}} & \text{if } \alpha_g > 0.8 \end{cases} \quad (40)$$

Huilin-Gidaspow モデル^[7]

$$\beta = \phi \beta_{\text{Ergun}} + (1 - \phi) \beta_{\text{Wen-Yu}} \quad (41)$$

$$\phi = \frac{\arctan [150 \times 0.75(\alpha_s - 0.2)]}{\pi} + 0.5 \quad (42)$$

Syamlal-O'Brien モデル^[3]

$$\beta = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_g \alpha_s \alpha_g}{d_s v_r^2} |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s| \quad (43)$$

$$v_r = 0.5 \left[A - 0.06 Re_s + \sqrt{(0.06 Re_s)^2 + 0.12 Re_s (2B - A) + A^2} \right] \quad (44)$$

$$C_D = \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{Re_s/v_r}} \right)^2 \quad (45)$$

$$Re_s = \frac{\rho_g d_s |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_s|}{\mu_g} \quad (46)$$

$$A = \alpha_g^{4.14} \quad (47)$$

$$B = \begin{cases} 0.8 \alpha_g^{1.28} & \text{if } \alpha_g \leq 0.85 \\ \alpha_g^{2.65} & \text{if } \alpha_g > 0.85 \end{cases} \quad (48)$$

3.9 グラニユラー温度の代数的解法

Syamlal らは、グラニユラーエネルギーの散逸が局所的に起こると仮定して、グラニユラー温度の方程式 (式 (8)) の対流と拡散を無視し、グラニユラー温度を代数的に求める方法を提案している [6] [3] . この仮定は、固相の体積分率が高く、固相の速度が比較的遅い時に成り立つらしい [1] .

式 (8) で対流と拡散を無視すると、次のようになる .

$$0 = (-p_s I + \tau_s) : \nabla \mathbf{u}_s - \gamma_s \quad (49)$$

これを整理して、次式が得られる .

$$\gamma_s + p_s I : \nabla \mathbf{u}_s - \tau_s : \nabla \mathbf{u}_s = 0 \quad (50)$$

ここで、次式のように置く .

$$p_s = K_1 \alpha_s^2 \Theta \quad (51)$$

$$\tau_s = \lambda'_s \text{tr} D_s I + 2\mu_s D_s \quad (52)$$

$$\lambda'_s = K_2 \alpha_s \sqrt{\Theta} = \lambda_s - \frac{2}{3} \mu_s \quad (53)$$

$$\mu_s = K_3 \alpha_s \sqrt{\Theta} \quad (54)$$

$$\gamma_s = K_4 \alpha_s^2 \Theta \sqrt{\Theta} \quad (55)$$

これらを式 (50) に代入すると、以下のようになる .

$$\begin{aligned} K_4 \alpha_s^2 \Theta \sqrt{\Theta} + K_1 \alpha_s^2 \text{tr} D_s \Theta - (\lambda'_s \text{tr}^2 D_s + 2\mu_s \text{tr} D_s^2) &= 0 \\ K_4 \alpha_s^2 \Theta \sqrt{\Theta} + K_1 \alpha_s^2 \text{tr} D_s \Theta - (K_2 \text{tr}^2 D_s + 2K_3 \text{tr} D_s^2) \alpha_s \sqrt{\Theta} &= 0 \\ K_4 \alpha_s \Theta + K_1 \alpha_s \text{tr} D_s \sqrt{\Theta} - (K_2 \text{tr}^2 D_s + 2K_3 \text{tr} D_s^2) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

ここで、以下の関係を用いた .

$$I : \nabla \mathbf{u}_s = \text{tr} D_s \quad (57)$$

$$D_s : \nabla \mathbf{u}_s = D_s : D_s = \text{tr} D_s^2 \quad (58)$$

2 次方程式の解の公式を用いると、以下の式が得られる .

$$\sqrt{\Theta} = \frac{-K_1 \alpha_s \text{tr} D_s + \sqrt{K_1^2 \alpha_s^2 \text{tr}^2 D_s + 4K_4 \alpha_s (K_2 \text{tr}^2 D_s + 2K_3 \text{tr} D_s^2)}}{2K_4 \alpha_s} \quad (59)$$

したがって、グラニユラー温度 Θ は次式で求められる .

$$\Theta = \left[\frac{-K_1 \alpha_s \text{tr} D_s + \sqrt{K_1^2 \alpha_s^2 \text{tr}^2 D_s + 4K_4 \alpha_s (K_2 \text{tr}^2 D_s + 2K_3 \text{tr} D_s^2)}}{2K_4 \alpha_s} \right]^2 \quad (60)$$

Syamlal らは、係数 K_1, K_2, K_3, K_4 をそれぞれ次のように設定している。

$$K_1 = 2\rho_s g_0(1+e) \quad (61)$$

$$K_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\alpha_s\rho_s d_s g_0(1+e) - \frac{2}{3}K_3 \quad (62)$$

$$K_3 = \frac{\rho_s d_s \sqrt{\pi}}{6(3-e)} \left[1 + \frac{2}{5}(1+e)(3e-1)\alpha_s g_0 \right] + \frac{4}{5\sqrt{\pi}}\alpha_s\rho_s d_s g_0(1+e) \quad (63)$$

$$K_4 = \frac{12(1-e^2)\rho_s g_0}{d_s \sqrt{\pi}} \quad (64)$$

モデルに依存しない形で書くとすれば、次のようになる。

$$K_1 = \frac{p_s}{\alpha_s^2 \Theta} \quad (65)$$

$$K_2 = \frac{\lambda'_s}{\alpha_s \sqrt{\Theta}} = \frac{\lambda_s}{\alpha_s \sqrt{\Theta}} - \frac{2}{3}K_3 \quad (66)$$

$$K_3 = \frac{\mu_s}{\alpha_s \sqrt{\Theta}} \quad (67)$$

$$K_4 = \frac{\gamma_s}{\alpha_s^2 \Theta \sqrt{\Theta}} \quad (68)$$

4 固相が複数ある場合

4.1 運動方程式

運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g) = \\ -\alpha_g \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_g \boldsymbol{\tau}_g) + \sum_i^N \beta_{g,i}(\mathbf{u}_{s,i} - \mathbf{u}_g) + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_{s,i} \rho_{s,i} \mathbf{u}_{s,i}) + \nabla \cdot (\alpha_{s,i} \rho_{s,i} \mathbf{u}_{s,i} \mathbf{u}_{s,i}) = \\ -\alpha_{s,i} \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{s,i} - \nabla p_{s,i} + \beta_{s,i}(\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_{s,i}) \\ + \sum_{j=1}^N \beta_{s,ij}(\mathbf{u}_{s,j} - \mathbf{u}_{s,i}) + \alpha_{s,i} \rho_{s,i} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\boldsymbol{\tau}_g = \mu_g \left[\nabla \mathbf{u}_g + \nabla (\mathbf{u}_g)^T \right] - \frac{2}{3} \mu_g \nabla \cdot \mathbf{u}_g \mathbf{I} \quad (71)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{s,i} = \mu_{s,i} \left[\nabla \mathbf{u}_{s,i} + \nabla (\mathbf{u}_{s,i})^T \right] + \left(\lambda_{s,i} - \frac{2}{3} \mu_{s,i} \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_{s,i} \mathbf{I} \quad (72)$$

$\beta_{g,i}$ は気体相と固体相 i の間の運動量交換係数、 $\beta_{s,ij}$ は固体相 i, j 間の運動量交換係数である。

4.2 固体圧力

FLUENT では、Gidaspow による固体圧力の導出方法 [4] から、固相が複数ある場合の固体圧力を次のように表しているようである [8] .

$$p_{s,i} = \alpha_{s,i} \rho_{s,i} \Theta_i + \sum_{j=1}^N 2 \frac{d_{s,ij}^3}{d_{s,i}^3} (1 + e_{ij}) \alpha_{s,i} \alpha_{s,j} \rho_i g_{0,ij} \Theta_i \quad (73)$$

ここで i, j はそれぞれの固相を表す添字で、 N 個の相があるものとしている . $d_{s,ij}$ は $d_{s,ij} = (d_{s,i} + d_{s,j})/2$, e_{ij} は相 i, j 間の反発係数 , $g_{0,ij}$ は相 i, j 間の動径分布関数 , $\alpha_{s,i}$ は i 相の体積分率である .

Gidaspow 本 [4] の式 (9.229) あたりの話をしているのだと思うが、難しくてよくわからない .

4.3 動径分布関数

Syamlal らは、複数の固相に対応する動径分布関数として次式を用いている [3] .

$$g_{0,ij} = \frac{1}{1 - \alpha_s} + \frac{3d_{s,i}d_{s,j}}{(1 - \alpha_s)^2(d_{s,i} + d_{s,j})} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{s,k}}{d_{s,k}} \quad (74)$$

ここで、 $\alpha_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{s,i}$ である .

$N = 1$ の場合は次のようになる .

$$g_{0,ii} = \frac{1}{1 - \alpha_s} + \frac{3\alpha_s}{2(1 - \alpha_s)^2} \quad (75)$$

Carnahan-Starling 式に近いカタチとなる .

FLUENT では、Syamlal らの式以外に、以下のような式が選べるようになっている [8] .

Sinclair-Jackson 式 (Ogawa-Umemura-Oshima 式)

$$g_{0,ii} = \left[1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,\max}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} + \frac{1}{2} d_{s,i} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{s,k}}{d_{s,k}} \quad (76)$$

Ibdir-Arastoopour 式

$$g_{0,ii} = \left[1 - \frac{\alpha_s}{\alpha_{s,\max}} \right]^{-1} + \frac{3}{2} d_{s,i} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{s,k}}{d_{s,k}} \quad (77)$$

Syamlal らの式以外の $g_{0,ij}$ については、以下の式で計算するようである .

$$g_{0,ij} = \frac{d_{s,j}g_{0,ii} + d_{s,i}g_{0,jj}}{d_{s,i} + d_{s,j}} \quad (78)$$

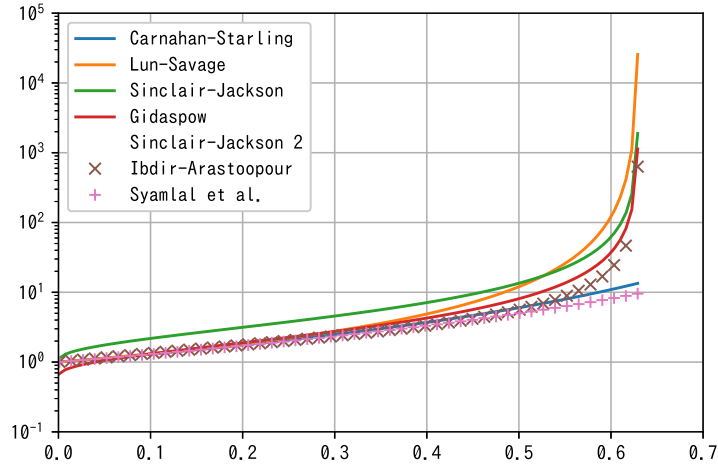


図 5: 動径分布関数 2

Sinclair-Jackson 式は，FLUENT では Lun らの式として参照されているようである（でも参照論文は Ogawa-Umemura-Oshima のもの）^[8]．おそらく，Lun らの論文^[2] が Ogawa-Umemura-Oshima 式を用いているからであろう．

固体体積分率に対して各モデルの値をプロットしたものを図 5 に示す．ここでは $\alpha_{s,max} = 0.63$ とし，固相はすべて同じ径であると想定した．“Sinclair-Jackson 2”，“Ibdir-Arastoopur”，“Syamlal et al.” が複数の固相を想定したモデルである．複数の固相を想定した Sinclair-Jackson 式は，固相の径がすべて同じであってももとの式に項が付加されることになるが，グラフ上はもとのものとほとんど違って見えない．Syamlal らのモデルは，式のかたちから予想されたように Carnahan-Starling 式に近い傾向を示している．

4.4 摩擦応力

摩擦応力について，Wachem は Syamlal らのモデルを α_s の式に書き直しているが^[1]，本来の式は α_g で表されている^[3]．

$$\begin{aligned}
 p_{s,i,fric} &= \alpha_{s,i} p^* \\
 p^* &= A(\alpha_g^* - \alpha_g)^n
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

ここで α_g^* は $\alpha_g^* = 1 - \alpha_{s,min}$ である．Syamlal らは，摩擦せん断応力（要するに摩擦粘性）は固相の第 1 相のみ計算するようにしているようである．

4.5 固体相間交換係数

Syamlal らは固体相間の運動量交換係数を提案している [3] .

$$\beta_{s,ij} = \frac{3(1 + e_{ij}) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C_{\text{fric},ij}\pi^2}{8} \right) \alpha_{s,i}\rho_{s,i}\alpha_{s,j}\rho_{s,j}(d_{s,i} + d_{s,j})^2 g_{0,ij}}{2\pi (\rho_{s,i}d_{s,i}^3 + \rho_{s,j}d_{s,j}^3)} |\mathbf{u}_{s,i} - \mathbf{u}_{s,j}| \quad (80)$$

ここで $C_{\text{fric},ij}$ は相 i, j 間の摩擦係数である .

参考文献

- [1] B.G.M. van Wachem: Derivation, Implementation, and Validation of Computer Simulation Models for Gas-Solid Fluidized Beds, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Amsterdam (2000).
- [2] C.K.K. Lun, S.B. Savage, D.J. Jefferey and N. Chepurny: Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield, J. Fluid Mech., 140:223-256 (1984).
- [3] M. Syamlal, W. Rogers and T.J. O'Brien: MFIx Documentation1: Theory Guide, Technical Note, DOE/METC-94/1004 (DE94000087), U.S. Department of Energy, Office of Fossil Energy (1993).
- [4] D. Gidaspow: Multiphase Flow and Fluidization, Academic Press (1994).
- [5] D.G. Schaeffer: Instability in the Evolution Equations Describing Incompressible Granular Flow, Journal of Differential Equations, 66, 19-50 (1987).
- [6] M. Syamlal: A Review of Granular Stress Constitutive Relations, Technical Note, DE-AC21-85MC21353, U.S. Department of Energy, Office of Fossil Energy (1987).
- [7] L. Huilin and D. Gidaspow: Hydrodynamics of binary fluidization in a riser: CFD simulation using two granular temperatures, Chemical Engineering Science, 58, 377-3792 (2003).
- [8] ANSYS FLUENT 6.3 User's Guide (2006).