ベクトルの内積

春日 悠

2016 年 11 月 3 日

目 次

1　ベクトルの内積

ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ の内積は、次式で定義される。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i \tag{1}$$

2 次元の場合、次のように表される。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \tag{2}$$

ここで θ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角である。なぜこれでよいのだろうか？ というのが今回のお話。

まず、同じベクトル同士であれば

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| \tag{3}$$

これは問題ない。

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ方向のベクトル $\boldsymbol{a}' = c\boldsymbol{a}$ の内積では

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = a_1(ca_1) + a_2(ca_2) = c(a_1^2 + a_2^2) = c|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}'| \tag{4}$$

これも問題なし。

さて、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積である。上の例から考えると、ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対する内積は、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向における大きさに関係しているように見える。したがって、ベクトル $\boldsymbol{b}$ との内積についても、$\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ の方向の大きさに関係するのかなと考えることができる。図 1 のようなベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ を考える。ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ の方向の長さ

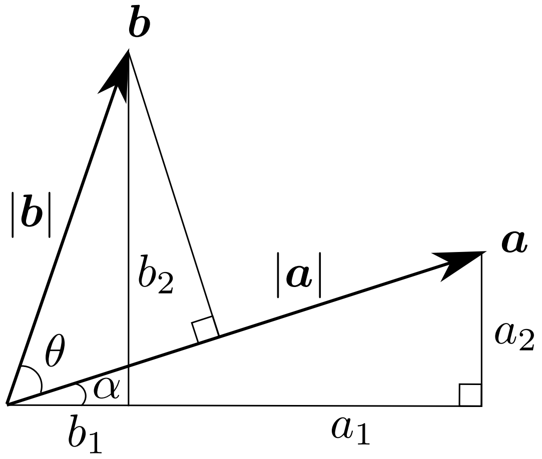

図 1: ベクトルの内積

は $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ であるが、この $\cos\theta$ をそれぞれのベクトルの成分で表すにはどうしたらよいだろうか？ 角 α については、$\cos\alpha = a_1/|\boldsymbol{a}|$、$\sin\alpha = a_2/|\boldsymbol{a}|$ である。また、角 $\beta = \theta + \alpha$ として、$\cos\beta = b_1/|\boldsymbol{b}|$、$\sin\beta = b_2/|\boldsymbol{b}|$ である。角 θ については、加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \\ &= \frac{b_1}{|\boldsymbol{b}|}\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{b_2}{|\boldsymbol{b}|}\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\end{aligned} \tag{5}$$

これより、次式が得られる。

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{6}$$

2 ベクトルの外積

ところで、内積と同じ方法で外積の式も得られそうなので、ついでに確認しておく。図 1 の $\sin\theta$ について加法定理を用いる。

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \\ &= \frac{b_2}{|\boldsymbol{b}|}\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} - \frac{b_1}{|\boldsymbol{b}|}\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} \\ &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\end{aligned} \tag{7}$$

したがって、次式を得る。

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \tag{8}$$