熱流動の理論

春日 悠

2014 年 1 月 18 日

目 次

1　エネルギー方程式

動いている場のエネルギー輸送を考えよう．物体内のある点の微小立方体を考える．空間にデカルト座標が設定されているとして，立方体のそれぞれの面が座標軸に垂直であるとする (図 1)．x 軸に垂直な 2 枚の面に着目し，x 軸の負側の面から立方体に流れ込む単位時間当たりの熱量を Q_x^-，x 軸の正側の面から立方体の外に流れ出す単位時間当たりの熱量を Q_x^+ としよう．熱流束を q_x とすると

$$
\begin{aligned}
Q_x^- &= q_x dydz \\
Q_x^+ &= \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydz \\
Q_x^- - Q_x^+ &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydz
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である．y, z 軸方向も同様に考えることができる．単位時間に立方体に流れ込む熱量は，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&Q_x^- - Q_x^+ + Q_y^- - Q_y^+ + Q_z^- - Q_z^+ \\
&\qquad = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dxdydz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dxdydz \\
&\qquad = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dxdydz \\
&\qquad = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} dxdydz
\end{aligned}
\tag{2}
$$

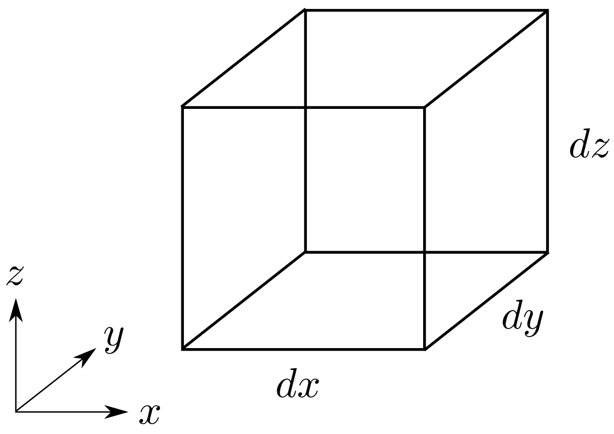

図 1: 微小立方体

場の速度ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると，熱流束と同様の考え方によって，圧力 p が立方体になす仕事は $-\nabla \cdot (p\boldsymbol{u})dxdydz$ と求まる．また，同様に，せん断応力 τ のなす仕事も $\nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{u})dxdydz$ として求まる (流束や圧力の場合と符号が逆なのは，応力はひっぱりが正だから).

立方体にかかる体積力 $\boldsymbol{b}$ による単位時間当たりの仕事は $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}$ である．立方体に単位時間に発生する単位体積当たりの熱量を S とする．密度を ρ とし，単位質量当たりの全エネルギーを E とすると，単位時間当たりのエネルギーのバランスは次のようになる．

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E\boldsymbol{u})\right\} dxdydz = \{-\nabla \cdot \boldsymbol{q} - \nabla \cdot (p\boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} + S\} dxdydz \tag{3}$$

したがって，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E\boldsymbol{u}) = -\nabla \cdot (p\boldsymbol{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} + S \tag{4}$$

温度を T，熱伝導率を k として，フーリエの法則

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{5}$$

を導入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E\boldsymbol{u}) = -\nabla \cdot (p\boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (k\nabla T) + \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} + S \tag{6}$$

全エネルギー E は，単位質量当たりの内部エネルギー e と運動エネルギーの和で表わされる．

$$E = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \tag{7}$$

ここで運動エネルギーの時間変化を考えると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\right)\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\left\{\frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})\right\}+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\\
&\qquad\qquad=\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

右辺最後の式に運動方程式を代入して

$$
\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\nabla\cdot(p\boldsymbol{u})+p\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\nabla\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{u})-\tau:\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}
\tag{9}
$$

これより，式 (6) は内部エネルギー e によりつぎのように表される．

$$
\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho e\boldsymbol{u})=\nabla\cdot(k\nabla T)-p\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\tau:\nabla\boldsymbol{u}+S
\tag{10}
$$

また，単位質量当たりのエンタルピーを

$$
h=e+\frac{p}{\rho}
\tag{11}
$$

とすると，式 (10) はつぎのように表される．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho h}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho h\boldsymbol{u})&=\nabla\cdot(k\nabla T)+\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(p\boldsymbol{u})-p\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\tau:\nabla\boldsymbol{u}+S\\
&=\nabla\cdot(k\nabla T)+\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p+\tau:\nabla\boldsymbol{u}+S
\end{aligned}
\tag{12}
$$

エンタルピーと運動エネルギーをまとめて全エンタルピー

$$
H=h+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=E+\frac{p}{\rho}
\tag{13}
$$

とすると，式 (6) は次のように書ける．

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho H)+\nabla\cdot(\rho H\boldsymbol{u})=\nabla\cdot(k\nabla T)+\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{u})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}+S
\tag{14}
$$

比熱が一定の場合，エンタルピーは次式で表すことができる．

$$
h=c_p(T-T_0)
\tag{15}
$$

ここで c_p は比熱，T_0 は参照温度である．密度 ρ を定数とみなせる場合，上式よりエネルギー方程式を温度で表現することができる．

$$
\frac{\partial T}{\partial t}+\nabla\cdot(T\boldsymbol{u})=\nabla\cdot(\alpha\nabla T)
\tag{16}
$$

ここで $\alpha=k/(\rho c_p)$ は熱拡散率 (thermal diffusivity) である．

2　状態方程式

熱流動の解析を行う場合，変数は，速度 3 成分，圧力，温度，密度の 6 つである．一方，方程式は，連続の式，運動方程式 3 つ，エネルギー方程式の 5 つであり，方程式が 1 つ足りない．そこで状態方程式 (equation of state) を導入する．状態方程式により密度が他の変数から求まることになり，方程式系が閉じる．

理想気体を考えると，その状態方程式は次式で表わされる．

$$pV = nRT \tag{17}$$

ここで n は気体のモル数，R は気体定数である．気体の質量を m，分子量を w とすると，モル数は $n = m/w$ である．また，$m = \rho V$ であるので，上式から密度は

$$\rho = \frac{p}{RT/w} \tag{18}$$

で求まる．

3　浮力による対流

熱輸送を考慮すると，温度変化により密度が変化する．密度変化は主に運動方程式の重力項に効いて，浮力を生じさせる．

浮力駆動による対流問題を解く場合，上で述べた方程式系をそのまま解けばよいが，密度変化による計算の不安定性を抑えるために，密度変化を基準密度からの差で考えることがある．基準密度を ρ_0，重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}$ として，重力項を次式で表わす．

$$\rho \boldsymbol{g} = \rho_0 \boldsymbol{g} + (\rho - \rho_0)\boldsymbol{g} \tag{19}$$

これをつぎのナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\nabla p - \nabla \left(\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) + \nabla \cdot \left[\mu \left\{ \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \right\} \right] + \boldsymbol{b} \tag{20}$$

に代入すると，右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \\ &\qquad = -\nabla p - \nabla \left(\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) + \nabla \cdot \left[\mu \left\{ \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \right\} \right] + \rho_0 \boldsymbol{g} + (\rho - \rho_0)\boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{21}$$

ここで圧力を次式で再定義する．

$$p' = p - \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} \tag{22}$$

するとナビエ・ストークス方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \\ &\qquad = -\nabla p' - \nabla \left(\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) + \nabla \cdot \left[\mu \left\{ \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \right\} \right] + (\rho - \rho_0)\boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{23}$$

対流は起こるが密度変化が小さい場合，運動方程式の重力項以外の密度変化を無視することができる．これをブシネスク近似 (Boussinesq approximation) という．この近似により計算の収束が速くなる場合がある．

密度 ρ を次式のように仮定する．

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T) \tag{24}$$

ここで β は体積膨張係数であり，ΔT は温度差を表わす．これより

$$(\rho - \rho_0)\boldsymbol{g} = -\rho_0\beta\Delta T\boldsymbol{g} \tag{25}$$

基準温度を T_0 として，温度差を $\Delta T = T - T_0$ とすると

$$(\rho - \rho_0)\boldsymbol{g} = -\rho_0\beta(T - T_0)\boldsymbol{g} \tag{26}$$

密度を $\rho = \rho_0$ としてしまえば，ナビエ・ストークス方程式は次式になる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})\\&\qquad = -\nabla p - \nabla\left(\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right) + \nabla\cdot\left[\mu\left\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right\}\right] - \rho\beta(T - T_0)\boldsymbol{g}\end{aligned} \tag{27}$$

理想気体の場合，体積膨張係数は

$$\beta = \frac{1}{T} \tag{28}$$

である．

参考文献

[1] H. K. Versteeg，W. Malalasekera：数値流体力学 [第 2 版]，森北出版 (2011).

[2] J.H. ファーツィガー，M. ペリッチ：コンピュータによる流体力学，シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003).

[3] 秋山守，有冨正徳：新しい気液二相流数値解析 - 多次元流動解析 -，コロナ社 (2002).