一般座標系におけるスカラー輸送方程式

春日 悠

2010 年 8 月 13 日

目 次

1 はじめに

境界適合格子による差分法などでは、方程式を一般座標系 (曲線座標系) で表現する。以下では、一般座標系におけるスカラー輸送方程式を導く。

2 連続の式

2.1 座標変換

まずは一般座標系における連続の式を求めよう。そのために、デカルト座標と一般座標の間の座標変換について考える。

2 次元で考えよう。デカルト座標を (x_1, x_2)、一般座標を (ξ^1, ξ^2) とする。あるスカラー場 $f(x_1, x_2)$ の一般座標における微分は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \xi^1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \\
\frac{\partial f}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2}
\end{aligned} \tag{1}
$$

めんどうなので

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = x_{i,j} \tag{2}$$

と書くことにし、行列で表すと

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

これより

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} x_{2,2} & -x_{2,1} \\ -x_{1,2} & x_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで J はヤコビアン

$$J = x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1} \tag{5}$$

である。

2.2 座標変換による導出

座標変換を用いて一般座標系の連続の式を導いてみよう。密度を ρ とすると、連続の式は物質時間導関数により次式で表される。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{6}$$

ここで $\boldsymbol{u}$ は物体の速度である。オイラー表記の連続の式は次式になる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{7}$$

連続の式を 2 次元デカルト座標における成分で表すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{8}$$

式 (4) より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{J}\left(x_{2,2}\frac{\partial \rho u_1}{\partial \xi^1} - x_{2,1}\frac{\partial \rho u_1}{\partial \xi^2}\right) \\
&= \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(x_{2,2}\rho u_1) - x_{2,21}\rho u_1 - \frac{\partial}{\partial \xi^2}(x_{2,1}\rho u_1) + x_{2,12}\rho u_1\right\} \\
&= \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(x_{2,2}\rho u_1) - \frac{\partial}{\partial \xi^2}(x_{2,1}\rho u_1)\right\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{J}\left(x_{1,2}\frac{\partial \rho u_2}{\partial \xi^1} - x_{1,1}\frac{\partial \rho u_2}{\partial \xi^2}\right) \\
&= -\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(x_{1,2}\rho u_2) - x_{1,21}\rho u_2 - \frac{\partial}{\partial \xi^2}(x_{1,1}\rho u_2) + x_{1,12}\rho u_2\right\} \\
&= -\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(x_{1,2}\rho u_2) - \frac{\partial}{\partial \xi^2}(x_{1,1}\rho u_2)\right\}
\end{aligned} \tag{10}
$$

これらを式 (8) に代入すると

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^1}\{\rho(x_{2,2}u_1 - x_{1,2}u_2)\} + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\{\rho(-x_{2,1}u_1 + x_{1,1}\rho u_2)\}\right] \tag{11}
$$

ここで、 U^1, U^2 を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
U^1 &= x_{2,2}u_1 - x_{1,2}u_2 \\
U^2 &= -x_{2,1}u_1 + x_{1,1}u_2
\end{aligned} \tag{12}
$$

これより

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\rho U^1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2}(\rho U^2)\right\} = 0 \tag{13}
$$

総和規約を用いると

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J}\frac{\partial \rho U^i}{\partial \xi^i} = 0 \tag{14}
$$

2.3 共変微分による導出

今度は、共変微分を用いて一般座標系における連続の式を導いてみよう。一般座標系における連続の式は、共変微分により

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\rho u^i}{\partial \xi^i} = 0 \tag{15}
$$

ここで g は計量テンソルの共変成分 g_{ij} の行列式である。

一般座標系の反変基底を $\boldsymbol{e}^i$ とすると、速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ の反変成分 u^i は次式で求まる。

$$
u^i = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^i \tag{16}
$$

反変基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ は、共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ より

$$
\boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{17}
$$

ここで g^{ij} は計量テンソルの反変成分であり、共変成分 g_{ij} の逆行列で与えられる。g_{ij} は

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{18}$$

であり、共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は次式で定義される。

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i} \tag{19}$$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ は空間の位置ベクトルである。

さて、g_{ij} は

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix} = (x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = (x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2 \tag{22}$$

より

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} (x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2 & x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2} \\ x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2} & (x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

これより、g^{ij} は

$$g^{ij} = [g_{ij}]^{-1} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} (x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2 & -(x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2}) \\ -(x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2}) & (x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

ここで g は

$$\begin{aligned} g &= \{(x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2\}\{(x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2\} - (x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2})^2 \\ &= (x_{1,1})^2(x_{1,2})^2 + (x_{1,1})^2(x_{2,2})^2 + (x_{2,1})^2(x_{1,2})^2 + (x_{2,1})^2(x_{2,2})^2 \\ &\qquad - (x_{1,1})^2(x_{1,2})^2 - 2x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}x_{2,2} - (x_{2,1})^2(x_{2,2})^2 \\ &= (x_{1,1})^2(x_{2,2})^2 - 2x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}x_{2,2} + (x_{2,1})^2(x_{1,2})^2 \\ &= (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})^2 \\ &= J^2 \end{aligned} \tag{25}$$

したがって $J = \sqrt{g}$ である。

反変基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^1 &= g^{1j}\boldsymbol{e}_j \\
&= g^{11}\boldsymbol{e}_1 + g^{12}\boldsymbol{e}_2 \\
&= \frac{1}{J^2}\left\{(x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2\right\}\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix} - \frac{1}{J^2}(x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2})\begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} (x_{1,2})^2 x_{1,1} + (x_{2,2})^2 x_{1,1} - x_{1,1}(x_{1,2})^2 - x_{2,1}x_{2,2}x_{1,2} \\ (x_{1,2})^2 x_{2,1} + (x_{2,2})^2 x_{2,1} - x_{1,1}x_{1,2}x_{2,2} - x_{2,1}(x_{2,2})^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} x_{1,1}(x_{2,2})^2 - x_{2,1}x_{2,2}x_{1,2} \\ (x_{1,2})^2 x_{2,1} - x_{1,1}x_{1,2}x_{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} x_{2,2}(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}) \\ -x_{1,2}(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J}\begin{bmatrix} x_{2,2} \\ -x_{1,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^2 &= g^{2j}\boldsymbol{e}_j \\
&= g^{21}\boldsymbol{e}_1 + g^{22}\boldsymbol{e}_2 \\
&= -\frac{1}{J^2}(x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2})\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix} + \frac{1}{J^2}\left\{(x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2\right\}\begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} -(x_{1,1})^2 x_{1,2} - x_{2,1}x_{2,2}x_{1,1} + (x_{1,1})^2 x_{1,2} + (x_{2,1})^2 x_{1,2} \\ -x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1} - (x_{2,1})^2 x_{2,2} + (x_{1,1})^2 x_{2,2} + (x_{2,1})^2 x_{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} -x_{1,1}x_{2,1}x_{2,2} + (x_{2,1})^2 x_{1,2} \\ -x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1} + (x_{1,1})^2 x_{2,2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J^2}\begin{bmatrix} -x_{2,1}(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}) \\ x_{1,1}(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J}\begin{bmatrix} -x_{2,1} \\ x_{1,1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

これより、速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ の反変成分 u^i は

$$
\begin{aligned}
u^1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^1 = \frac{1}{J}(x_{2,2}u_1 - x_{1,2}u_2) \\
u^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^2 = \frac{1}{J}(-x_{2,1}u_1 + x_{1,1}u_2)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

式 (12) を用いると

$$u^i = \frac{1}{J}U^i \tag{29}$$

上式を式 (15) に代入すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{J}\frac{\partial\rho U^i}{\partial\xi^i} = 0 \tag{30}$$

これで式 (14) が得られた。

3　スカラー輸送方程式

3.1　座標変換による導出

スカラー輸送方程式は、スカラー場を ϕ とすると

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\boldsymbol{u}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \tag{31}$$

ここで、Γ は拡散係数、S は生成項である。拡散の強さは、場所には依存するが方向には依存しないものとする。

2 次元デカルト座標におけるスカラー輸送方程式は

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 \phi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2 \phi) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + S \tag{32}$$

式 (4) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \frac{1}{J}\left(x_{2,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{2,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= -\frac{1}{J}\left(x_{1,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{1,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

拡散項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) &= \frac{1}{J}x_{2,2}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\frac{1}{J}\left(x_{2,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{2,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{J}x_{2,1}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{\frac{1}{J}\left(x_{2,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{2,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\frac{1}{J}\left((x_{2,2})^2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{2,1}x_{2,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{\frac{1}{J}\left(x_{2,1}x_{2,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - (x_{2,1})^2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

同様に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) &= -\frac{1}{J}x_{1,2}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{-\frac{1}{J}\left(x_{1,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{1,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{J}x_{1,1}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{-\frac{1}{J}\left(x_{1,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{1,1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\frac{1}{J}\left((x_{1,2})^2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - x_{1,1}x_{1,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{\frac{1}{J}\left(x_{1,1}x_{1,2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} - (x_{1,1})^2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{35}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) = \\ &\quad \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\Gamma\left(c_1\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + c_2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{\Gamma\left(c_2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + c_3\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{36}$$

ここで

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{J}\left((x_{1,2})^2 + (x_{2,2})^2\right) \\
c_2 &= -\frac{1}{J}(x_{1,1}x_{1,2} + x_{2,1}x_{2,2}) \\
c_3 &= \frac{1}{J}\left((x_{1,1})^2 + (x_{2,1})^2\right)
\end{aligned} \tag{37}$$

以上より、一般座標系におけるスカラー輸送方程式は次式のようになる。

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^1}(\rho U^1 \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi^2}(\rho U^2 \phi)\right\} = \\
\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left\{\Gamma\left(c_1\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + c_2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left\{\Gamma\left(c_2\frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} + c_3\frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}\right)\right\} + S
\end{gathered} \tag{38}$$

ここで、c^{ij} を次のように定義する。

$$c^{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

すると、総和規約を用いて次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\rho U^i \phi)\right\} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\Gamma c^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^j}\right) + S \tag{40}$$

3.2 共変微分との関係

ところで、c^{ij} の値をよく見ると

$$g^{ij} = \frac{1}{J}c^{ij} \tag{41}$$

であることがわかる。したがって、一般座標系におけるスカラー輸送方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J\rho u^i \phi\right) = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(J\Gamma g^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial \xi^j}\right) + S \tag{42}$$

これは、共変微分による表現と一致する。

参考文献

[1] 峯村吉泰, Java による 流体・熱流動の数値シミュレーション, 森北出版, 2001

[2] J.H. ファーツィガー, M. ペリッチ, コンピュータによる流体力学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003

[3] 石原繁, テンソル -科学技術のために-, 裳華房, 1991