浮体の安定性

春日 悠

2014 年 7 月 6 日

目 次

1　浮力

水中の物体には、静水圧による浮力 (buoyant force) が働く。図 1 (a) のように、物体が水中に固定されており、物体表面に水による圧力 p を受けているものとする。この物体に働く浮力を求めよう。思考実験として、物体が占めている空間を水に置き換えてしまったとする (図 1 (b))。水は静止しているものとする。(b) で点線により示されている物体の表面に当たる部分にかかる力は、(a) の物体の表面にかかる力と同じはずである。一方、(b) の物体が占めていた部分に当たる水の重力は、密度を ρ、体積を V、重力加速度を g とすると、$\rho g V$ である。水は静止しているから、物体の表面に相当する部分にかかる力と、物体が占めていた部分に相当する水の重力は釣り合う。(b) で物体の表面に相当する部分にかかる力と、(a) で実際に物体にかかる力が同じで、これが浮力であるから、浮力の大きさは $\rho g V$ である。

すなわち、水中の物体は、その物体が排除した体積分の水の重力に等しい浮力を上向きに受ける。これをアルキメデスの原理という。

2　浮体

水に浮いている物体を浮体 (floating body) という。図 2 のような浮体を考える。浮体は、重力と浮力が釣り合うところまで沈んで安定する。水面から浮体の底面までの高さを喫水という。水面下の物体の体積 V_E を排水体積という。重力は物体の重心 G に作用する。排水体積部分を水で置き換えたときのその部分の重心を浮心 (図の点 C) といい、浮力はこの点に作用する。物体の密度を ρ、物体の体積を V、水の密度を ρ_w と

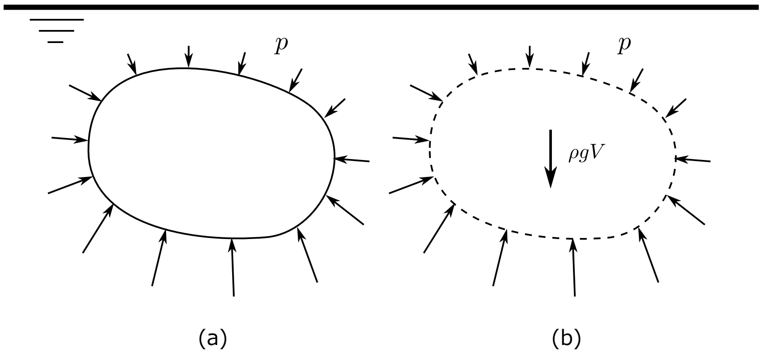

図 1: 浮力

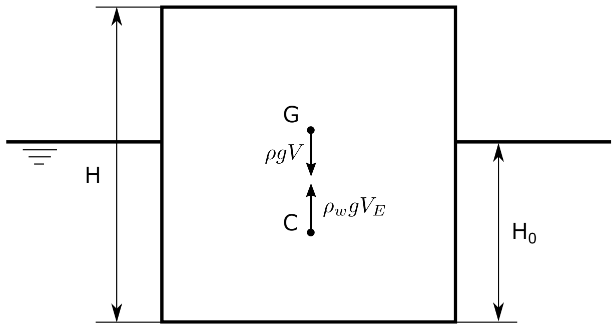

図 2: 浮体

すると、物体の重力は ρgV、物体にかかる浮力は $\rho_w gV_E$ で、これらが釣り合うから、排水体積は $V_E = (\rho/\rho_w)V$ である。浮体を直方体として、浮体の高さを H とすると、喫水 H_0 は $H_0 = (\rho/\rho_w)H$ である。

3　浮体の安定性

水に浮かんでいる浮体がちょっとしたことでひっくり返るかどうかという、浮体の安定性を考えてみる。図 3 のように、浮体が点 O を中心として時計回りに角度 θ だけ回転したところを考える。(b) の灰色の部分が水に対する浸漬について変化したところであるが、水に浸かった部分と水から出てきた部分の体積が同じなので、浮力の大きさは回転前と回転後で変化しない。ただし、回転によって浮心は C から C′ に移動する。線分 $\overline{\mathrm{CG}}$ の延長した線と、C′ から鉛直に伸ばした線との交点 M を傾心あるいはメタセンタ (metacenter) という。重心と傾心の距離 $\overline{\mathrm{GM}}$ を h (G から M の方向を正とする) とすると、これによって安定性の条件を導くことができる。

浮体の安定性を考えるために、浮体にかかる力による回転の方向について考える。重心が傾心より下にある場合 ($h > 0$) を、図 4 の左側に示す。傾心を回転中心と考えれば、物体の重力による回転だけ考えればよい。この場合、物体の重力により、浮体の

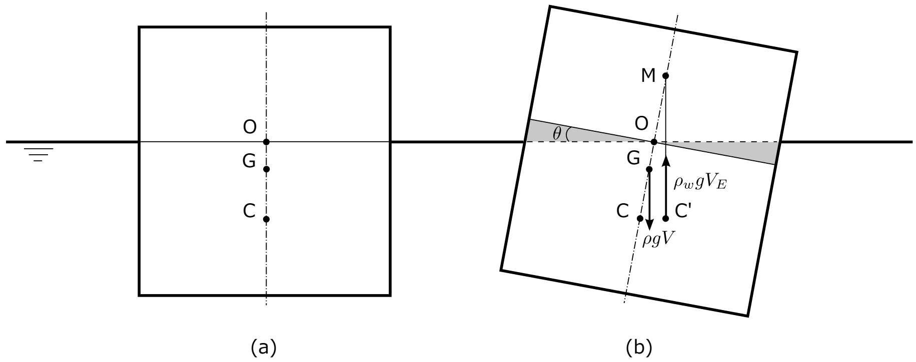

図 3: 浮体の安定性 1

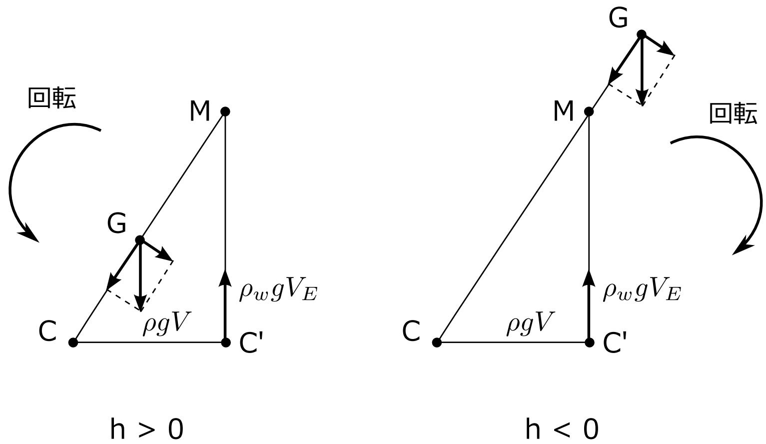

図 4: 浮体の安定性 2

姿勢をもとに戻す方向に回転のモーメントが働く。この力を復元力という。復元力が働く場合、(静力学的には) 浮体は安定である。一方、図 4 の右側のように、重心が浮心より上にある場合 ($h < 0$)、物体の重力により浮体をより傾ける方向に回転のモーメントが働くため、浮体は不安定である。以上の考察より、浮体が安定である条件は $h > 0$ である。ちなみに、浮心と重心の距離 $\overline{CG}$ を a (C から G の方向を正とする) とすると、$a < 0$ の場合は必ず安定である。なぜなら、M は必ず C より上に来るため、$a < 0$ の状態では $h < 0$ にはなりえないからである。

では、重心と傾心の距離 h を求めてみよう。ここで、角度 θ は小さいと仮定する。浮力について変化しているのは、図 3 の灰色の部分だけである。この部分を取り出したものを図 5 に示す。物体の回転により、点 O の右側の部分では回転のモーメントを得、左側の部分では回転のモーメントを失うので、回転のモーメントの変化は次式に

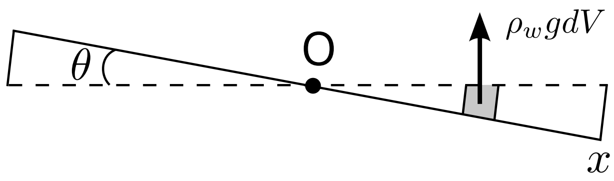

図 5: 浮体の安定性 3

なる。

$$
\begin{aligned}
M_o &= \int x\rho_w g dV \\
&= \int x\rho_w g x\theta dA \\
&= \rho_w g\theta \int \ x^2 dA \\
&= \rho_w g\theta I_y
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで

$$
I_y = \int \ x^2 dA \tag{2}
$$

は、水面が物体を切ってできる断面に関する、点 O を通る軸を中心とした断面二次モーメントである。

一方で、浮心が C から C′ に移動することに対する浮力の変化は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
M_c &= \overline{CC'}\rho_w g V_E \\
&= (h+a)\theta\rho_w g V_E
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$M_o = M_c$ より

$$
h = \frac{I_y}{V_E} - a \tag{4}
$$

浮体の安定性は物体の方向により異なるが、I_y が最小になる方向 (より不安定になりやすい方向) について判定すればよい。

参考文献

[1] 有田正光：水理学の基礎，東京電機大学出版局 (2006).

[2] 西海孝夫，一柳隆義：演習で学ぶ「流体の力学」入門，秀和システム (2013).

[3] 国立天文台 編：理科年表 平成 26 年 (2013).