有限体積法

春日 悠

2013 年 11 月 30 日

目 次

1 有限体積法

有限体積法は，コントロールボリューム法とも呼ばれ，連続体の偏微分方程式を離散化して解く手法の一つである．連続体をコントロールボリュームあるいはセルとも呼ばれる多面体で分割し，方程式をセルの体積積分の形で表す (図 1).

離散点をセルの中心に置き，セル内部の値をセル中心の値で代表させる．セル中心の位置を次式で表す.

$$\boldsymbol{x}_P = \frac{\int \boldsymbol{x} dV}{\int dV} \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}$ は位置ベクトルであり，添え字 P は注目しているセルの値であることを表す．積分の範囲は注目セルの内部とする．上式より次式が成り立つ.

$$\int (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P) dV = 0 \tag{2}$$

スカラー量 ϕ を考え，セル中心まわりでテーラー展開すると

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}_P) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P) \cdot \nabla \phi(\boldsymbol{x}_P) + \cdots \tag{3}$$

これをセルにおいて積分すると

$$\int \phi(\boldsymbol{x}) dV = \int \phi(\boldsymbol{x}_P) dV = \phi_P V_P \tag{4}$$

これより，ϕ のセル内部での積分値はセル中心値 ϕ_P とセル体積 V_P の積で表されることがわかる．また

$$\phi_P = \frac{\int \phi(\boldsymbol{x}) dV}{\int dV} \tag{5}$$

なので，ϕ_P はセル内部における体積平均値を表していることになる.

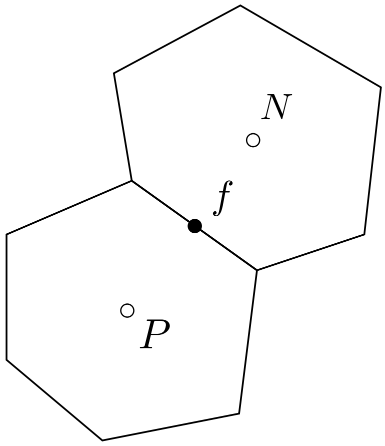

図 1: セル

2　離散化

たとえば，次のようなスカラー輸送方程式を考える．

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\phi\boldsymbol{u}) = \nabla\cdot(k\nabla\phi) + S \tag{6}$$

ここで ρ は密度，$\boldsymbol{u}$ は流速ベクトル，k は拡散係数，S はソース項である．これを有限体積法で離散化する．まず，方程式をセルにおいて積分する．

$$\int \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} dV + \int \nabla\cdot(\rho\phi\boldsymbol{u}) dV = \int \nabla\cdot(k\nabla\phi) dV + \int S dV \tag{7}$$

これは次式のように書ける．

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} V_P + \int \nabla\cdot(\rho\phi\boldsymbol{u}) dV = \int \nabla\cdot(k\nabla\phi) dV + S V_P \tag{8}$$

時間微分は差分法で離散化するとして，空間微分の離散化について考える．

発散はガウスの発散定理により次のように表す．

$$\int \nabla\cdot\boldsymbol{u} dV = \int \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} dS = \sum \boldsymbol{u}_f\cdot\boldsymbol{S}_f \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ はセル表面の法線ベクトルを表す．添え字 f は多角形セルのひとつの面の中心の値を意味する．$\boldsymbol{S}_f$ は面の面積を大きさとして持つ法線ベクトル (面積ベクトル) である．

ラプラシアンについても同様である．

$$\int \nabla\cdot(k\nabla\phi) dV = \int (k\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n} dS = \sum k_f (\nabla\phi)_f\cdot\boldsymbol{S}_f \tag{10}$$

勾配についても同様の考え方で

$$\int \nabla\phi dV = \int \phi\boldsymbol{n} dS = \sum \phi_f \boldsymbol{S}_f \tag{11}$$

さて，ここで未知なのは ϕ_f や $(\nabla\phi)_f$ といった面中心の値である．これらの表しかたで離散化の精度が決まる．これらの補間や離散化の方法のことを，補間スキームとか離散化スキームなどという．線形補間が単純な方法である．

$$\phi_f = w\phi_P + (1-w)\phi_N \tag{12}$$

ここで，添え字 N は注目セルから注目面を挟んだ隣のセル (隣接セル) を表す．w は注目セル中心から面中心までの距離と注目セル中心から隣接セル中心までの距離の比である．

$$w = \frac{|\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_N|}{|\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_P|} \tag{13}$$

ただし，線形補間は差分で言えば中心差分にあたり，対流項で使うには問題がある．対流項には次の風上スキームのようなものを用いる．

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & (\boldsymbol{u}_f \cdot \boldsymbol{S}_f \geq 0) \\ \phi_N & (\boldsymbol{u}_f \cdot \boldsymbol{S}_f < 0) \end{cases} \tag{14}$$

面中心の勾配 $(\nabla\phi)_f$ については，$(\nabla\phi)_f \cdot \boldsymbol{S}_f$ の形で面の法線方向の勾配として離散化する．

$$(\nabla\phi)_f \cdot \boldsymbol{S}_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{|\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_P|}|\boldsymbol{S}_f| \tag{15}$$

以上の方法で方程式を離散化すると，一般に次のような形で表せる．

$$A_P\phi_P + \sum A_N\phi_N = b \tag{16}$$

ここで A_P, A_N は係数，b は右辺である．これを全セルで合成すると，偏微分方程式に対応した代数方程式ができる．