有限要素法の枠組み

春日 悠

2009 年 6 月 20 日

目 次

1 有限要素法の枠組み 1

2 変分原理 1

3 仮想仕事の原理 2

4 重み付き残差法 4

5 有限要素定式化 4

1 有限要素法の枠組み

有限要素法の入門書では、バネやトラスのつり合い方程式をベクトルと行列で表わす方法がよく紹介されているが、これらは有限要素法というよりマトリックス法であり、狭い範囲の問題にしか使えない。

一般には、解きたい微分方程式の弱形式に対して有限要素で離散化し、有限要素方程式を導く。弱形式 (固体の変形解析では仮想仕事の原理式) を求めるために、有限要素法には以下の枠組みがある。

- 変分原理
- 仮想仕事の原理
- 重み付き残差法

2 変分原理

関数まで引数として考える関数を汎関数という。ある微分方程式について、ある汎関数を停留にする関数が微分方程式の解になることを変分原理という。汎関数の停留

条件は、汎関数の変分が 0 になることである。変分というのは、微分の話で出てくる無限小量 (dx, dy など) のようなものだと思えばよい。汎関数の変分を求めてそれを 0 とおくと、微分方程式が得られるということである。固体の変形においては、最小ポテンシャルエネルギーの原理がこれにあたる。

ひずみで微分するとそのひずみに対応する応力が得られるようなポテンシャル ψ が存在する物体 (超弾性体) を考えよう。微小ひずみテンソル ϵ、コーシー応力テンソル σ を考えると

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \tag{1}$$

と表わされる。たとえば、C を 4 階のテンソルとして、ひずみ ϵ と応力 σ に次の関係式

$$\sigma = C : \epsilon \tag{2}$$

が成り立つならば

$$\psi = \frac{1}{2}\epsilon : (C : \epsilon) \tag{3}$$

である。

ポテンシャル ψ が存在するとき、物体の全ポテンシャルエネルギー汎関数 Π は次式のように書ける。

$$\Pi = \int \psi dV - \int \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} dS - \int \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル、$\boldsymbol{t}$ は表面力ベクトル、$\boldsymbol{b}$ は体積力ベクトルである。汎関数 Π の変分 $\delta\Pi$ を考え、それを 0 とおくと

$$\delta\Pi = \int \delta\psi dV - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} dS - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \tag{5}$$

ポテンシャルの変分 $\delta\psi$ は、定義より

$$\delta\psi = \sigma : \delta\epsilon \tag{6}$$

と表わされるので

$$\int \delta\epsilon : \sigma dV - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} dS - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \tag{7}$$

この式を仮想仕事の原理式という。

3　仮想仕事の原理

仮想変位 $\delta\boldsymbol{u}$ による仮想仕事の和が 0 であることと平衡方程式が成り立つことは等価であるということを、仮想仕事の原理という。

物体の表面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として、コーシーの公式 $\boldsymbol{t} = \sigma \cdot \boldsymbol{n}$ を仮想仕事の式 (7) に代入すると

$$\begin{aligned}\int \delta\epsilon : \sigma dV - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot (\sigma \cdot \boldsymbol{n}) dS - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \\ \int \delta\epsilon : \sigma dV - \int (\delta\boldsymbol{u} \cdot \sigma) \cdot \boldsymbol{n} dS - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0\end{aligned} \tag{8}$$

発散定理より

$$\int \delta\epsilon : \sigma dV - \int \nabla \cdot (\delta\boldsymbol{u} \cdot \sigma) dV - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \tag{9}$$

ここで

$$\begin{aligned}\delta\epsilon : \sigma &= \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} \\ &= \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\right) \\ &= \sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} \\ &= (\nabla \cdot \delta\boldsymbol{u}) : \sigma\end{aligned} \tag{10}$$

より

$$\int (\nabla \cdot \delta\boldsymbol{u}) : \sigma dV - \int \nabla \cdot (\delta\boldsymbol{u} \cdot \sigma) dV - \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \tag{11}$$

また

$$\nabla \cdot (\delta\boldsymbol{u} \cdot \sigma) = (\nabla \cdot \delta\boldsymbol{u}) : \sigma + \delta\boldsymbol{u} \cdot (\nabla \cdot \sigma) \tag{12}$$

より

$$\begin{aligned}\int \delta\boldsymbol{u} \cdot (\nabla \cdot \sigma) dV + \int \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} dV = 0 \\ \int \delta\boldsymbol{u} \cdot (\nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b}) dV = 0\end{aligned} \tag{13}$$

仮想変位 $\delta\boldsymbol{u}$ は 0 とは限らないので、上式が成り立つためには次式が成立しなければならない。

$$\nabla \cdot \sigma + \boldsymbol{b} = 0 \tag{14}$$

これは平衡方程式である。

4　重み付き残差法

微分方程式から直接的に仮想仕事の原理式を求めることもできる。その場合は、重み付き残差法を用いる。

重み付き残差法では、まず、考えている微分方程式の解の関数形を仮定する。これを試行関数という。試行関数に重み関数というものをかけ、領域積分を行って残差というものを作り、この残差が 0 となるように試行関数の係数を決める。試行関数に区分多項式を用いるのが、有限要素法である。

重み関数は自由に選んでよいが、重み関数に試行関数と同じ形の関数を選ぶ方法を特にガラーキン法と呼ぶ。固体の変形解析における有限要素法では、ふつうは試行関数に変位ベクトル、重み関数に変位ベクトルの変分が選ばれ、両者に同じ補間関数を用いるのでガラーキン法の一種と見なされる。

重み関数を $\delta\boldsymbol{u}$ として、平衡方程式 (14) の残差を 0 とおくと次式が得られる。

$$\int \delta\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\sigma+\boldsymbol{b})dV=0 \tag{15}$$

上式から仮想仕事の原理の議論をさかさまにたどると、最終的に仮想仕事の原理式 (7) が得られる。

一般的な話をすると、ある微分方程式に対して、仮想仕事の原理式にあたるものは、もとの方程式よりも微分の階数が低く、要求される関数の連続性が弱まっているため、弱形式という。一方で、仮想仕事の原理式に対する平衡方程式にあたる元の方程式は、強形式と呼ばれる。

5　有限要素定式化

さて、有限要素法を適用するために、解きたい微分方程式の弱形式をどうにかして得たとしよう。それに対して有限要素離散化を施せば、有限要素方程式が得られる。ここでは、固体の変形解析の場合を考えよう。

物体が占める領域を節点と要素で表わしたとする。そのとき、変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を要素節点変位列ベクトル $\boldsymbol{d}_e$ によって次のように表わすことにする。

$$\boldsymbol{u}=N\boldsymbol{d}_e \tag{16}$$

ここで N は内挿関数行列である。変位からひずみが計算できるので、上式からひずみ ϵ と $\boldsymbol{d}_e$ の関係は次式のように書ける。

$$\boldsymbol{\epsilon}=B\boldsymbol{d}_e \tag{17}$$

ここで $\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみテンソル ϵ の成分を一列に並べた列ベクトルであり、B は N の空間微分に関する行列である。

ひずみ ϵ と応力 σ の関係が次式のように表わされる場合を考えよう。

$$\boldsymbol{\sigma}=D\boldsymbol{\epsilon} \tag{18}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\epsilon}$ 同様に応力テンソル σ の成分を一列に並べた列ベクトルであり、D は物性に関する行列である。

準備ができたので、弱形式、ここでは仮想仕事の原理式 (7) の有限要素離散化を実行しよう。上では各量をテンソル形式から行列形式に変換したので、仮想仕事の原理式を次式のように行列形式に書き直す。

$$\int \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} dS - \int \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} dV = 0 \tag{19}$$

上式の積分を要素ごとの積分の和と見なして、式 (16)、(17)、(18) を代入すると、次式のようになる。

$$\sum \left(\delta{\boldsymbol{d}_e}^T \int B^T D B dV \boldsymbol{d}_e - \delta{\boldsymbol{d}_e}^T \int N^T \boldsymbol{t} dS - \delta{\boldsymbol{d}_e}^T \int N^T \boldsymbol{b} dV \right) = 0 \tag{20}$$

総和の記号は、全要素積分の合成を表わす。変分 $\delta\boldsymbol{d}_e$ の任意性から、次式の有限要素方程式が得られる。

$$K\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{21}$$

ここで K は全体剛性行列、$\boldsymbol{d}$ は全体節点変位列ベクトル、$\boldsymbol{f}$ は全体外力列ベクトルであり、それぞれ

$$\begin{aligned} K &= \sum \int B^T D B dV \\ \boldsymbol{d} &= \sum \boldsymbol{d}_e \\ \boldsymbol{f} &= \sum \int N^T \boldsymbol{t} dS + \sum \int N^T \boldsymbol{b} dV \end{aligned} \tag{22}$$

参考文献

[1] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992