弾性係数テンソル

春日 悠

2009 年 3 月 26 日

目 次

1 弾性係数テンソル

等方性をもつ弾性体を考えよう。応力テンソルの成分を σ_{ij}、微小ひずみテンソルの成分を ϵ_{ij} とすると、弾性体の応力とひずみの関係は次式のように書ける。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{1}$$

ここで C_{ijkl} を成分にもつテンソルを弾性係数テンソルという。応力テンソルの対称性より

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{2}$$

である。

2 等方テンソル

2.1 2 階の等方テンソル

どんな直交座標に関しても常に同一の成分をもつテンソルを等方テンソルという。直交座標系間の変換を a_{ij} とすると、2 階の等方テンソルの成分 T_{ij} は次式を満足する。

$$T_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \tag{3}$$

座標変換の影響を受けない 2 階のテンソルとして思い浮かぶのは、クロネッカーのデルタ δ_{ij} である。実際、a_{ij} が直交行列であることに注意して

$$a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \tag{4}$$

一般に、α をスカラーとして、2 階の等方テンソルの成分は

$$T_{ij} = \alpha\delta_{ij} \tag{5}$$

で表される。

2.2　4 階の等方テンソル

4 階の等方テンソルの成分 T_{ijkl} は、次式を満たすようなものである。

$$T_{ijkl} = a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}T_{mnpq} \tag{6}$$

さて、上の式の添え字 m と n、p と q の 2 組が同じになればクロネッカーのデルタが 2 つできるが、添え字 2 組を同じにするのもまた 2 つのクロネッカーのデルタなので

$$\begin{aligned} a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}\delta_{mn}\delta_{pq} &= a_{im}a_{jm}a_{kp}a_{lp} \\ &= \delta_{ij}\delta_{kl} \end{aligned} \tag{7}$$

したがって、$\delta_{ij}\delta_{kl}$ は等方テンソルの成分としての性質を満たす。また、添え字 m, p と n, q の 2 組でも同じ話ができて

$$\begin{aligned} a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}\delta_{mp}\delta_{nq} &= a_{im}a_{km}a_{jn}a_{ln} \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl} \end{aligned} \tag{8}$$

さらに、添え字 m, q と n, p の 2 組でも同様に

$$\begin{aligned} a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}\delta_{mq}\delta_{np} &= a_{im}a_{lm}a_{jn}a_{kn} \\ &= \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \tag{9}$$

結局、一般の 4 階の等方テンソルの成分 T_{ijkl} は、上の 3 つの線形結合で与えられる。α, β, γ をそれぞれスカラーとすると

$$T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} \tag{10}$$

これは

$$\begin{aligned} T_{klij} &= \alpha\delta_{kl}\delta_{ij} + \beta\delta_{ki}\delta_{lj} + \gamma\delta_{kj}\delta_{li} \\ &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \tag{11}$$

より $T_{ijkl} = T_{klij}$ の対称性をもつ。

ここで対称性

$$T_{ijkl} = T_{jikl} \tag{12}$$

を想定すると

$$\begin{aligned} T_{ijkl} &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} \\ T_{jikl} &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \gamma\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \tag{13}$$

より $\beta = \gamma$ が成り立ち、したがって次式を得る。

$$T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{14}$$

これは

$$\begin{aligned} T_{ijlk} &= \alpha\delta_{ij}\delta_{lk} + \beta(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \\ &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \tag{15}$$

より $T_{ijkl} = T_{ijlk}$ の対称性をもつ。

3 ラメ定数

等方テンソルの議論より、等方性をもつ弾性体の弾性係数テンソル C_{ijkl} は次式で表される。

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{16}$$

ここでスカラー λ, μ をラメ定数という。

弾性体を特徴づけるパラメタであるヤング率 E、ポアソン比 ν とラメ定数との関係を導こう。

3 次元等方性弾性体のひずみテンソルの各成分は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \epsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E} \\ \epsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} \\ 2\epsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{G} \\ 2\epsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{G} \\ 2\epsilon_{31} &= \frac{\sigma_{31}}{G} \end{aligned} \tag{17}$$

ここで G は横弾性係数

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{18}$$

である。上式を行列で表すと

$$
\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \tag{19}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
&\quad \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{20}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\
&= \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}\,\epsilon_{kl} \\
&= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}
\end{aligned} \tag{21}
$$

であり、これを縮約して行列の形で表すと

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} \tag{22}
$$

上式と式 (20) を比較すると、次の関係式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G
\end{aligned} \tag{23}
$$

4 曲線座標系における弾性係数テンソル

曲線座標系における弾性係数テンソルの成分を導こう。デカルト座標を (x_1, x_2, x_3)、曲線座標を (ξ^1, ξ^2, ξ^3) とし、それぞれの基底を $\boldsymbol{e}_i$, $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ とする。デカルト座標系における弾性係数テンソルの成分を $C^{ijkl} = C_{ijkl}$ とし、曲線座標系における弾性係数テンソルの反変成分を $\bar{C}^{ijkl}$ としよう。すると、$\bar{C}^{ijkl}$ は次式で表される。

$$\bar{C}^{ijkl} = (\bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{e}_m)(\bar{\boldsymbol{e}}^j \cdot \boldsymbol{e}_n)(\bar{\boldsymbol{e}}^k \cdot \boldsymbol{e}_p)(\bar{\boldsymbol{e}}^l \cdot \boldsymbol{e}_q)C^{mnpq} \tag{24}$$

ここで、位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i} \tag{25}$$

また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^j} \\ &= \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\bar{\boldsymbol{e}}_j \end{aligned} \tag{26}$$

なので

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\bar{\boldsymbol{e}}_k\right) \\ &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \end{aligned} \tag{27}$$

したがって

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^q}C^{mnpq} \\ &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\left\{\lambda\delta^{mn}\delta^{pq} + \mu(\delta^{mp}\delta^{nq} + \delta^{mq}\delta^{np})\right\} \end{aligned} \tag{28}$$

ところで、曲線座標系における計量テンソル G の反変成分を g^{ij}、共変成分を g_{ij} とすると

$$\begin{aligned} g^{ik}g_{kj} &= g^{ik}\bar{\boldsymbol{e}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j \\ &= g^{ik}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \end{aligned} \tag{29}$$

より

$$g^{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \tag{30}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\delta^{mn}\delta^{pq} &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^p} \\ &= g^{ij}g^{kl} \end{aligned} \tag{31}$$

同様に

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\delta^{mp}\delta^{nq} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^n} = g^{ik}g^{jl} \tag{32}$$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\delta^{mq}\delta^{np} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^n}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} = g^{il}g^{jk} \tag{33}$$

したがって、曲線座標系における弾性係数テンソルの反変成分は、次式のように表される。

$$\bar{C}^{ijkl} = \lambda g^{ij}g^{kl} + \mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) \tag{34}$$

参考文献

[1] 石原繁, テンソル -科学技術のために-, 裳華房, 1991

[2] 北川浩, 瀬口靖幸, 富田佳宏, 大ひずみ大変形の増分理論とそれによる有限要素法, 日本機械学会論文集, 1972