離散要素法

春日 悠

2012 年 10 月 28 日

目 次

1 はじめに

多粒子の挙動をシミュレートする手法の一つである離散要素法 (Discrete Element Method, DEM) の理論について整理する。

2 方程式

各粒子について下記の方程式を解く。

$$\begin{aligned} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} &= \boldsymbol{F}_i \\ I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} &= \boldsymbol{M}_i \end{aligned} \tag{1}$$

第 i 番目の粒子を粒子 i と呼ぶことにし、粒子 i の質量を m_i とする。同様に、$\boldsymbol{v}_i, I_i, \boldsymbol{\omega}_i$ をそれぞれ 粒子 i の速度、慣性モーメント、角速度とする。また、$\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{M}_i$ はそれぞれ粒子 i にかかる力とモーメントである。ここでは球状の粒子を考える。慣性モーメント I_i は次式で与えられる。

$$I_i = \frac{2}{5} m_i {R_i}^2 \tag{2}$$

ここで R_i は粒子 i の半径である。

粒子 i にかかる力 $\boldsymbol{F_i}$ はつぎのように表せる。

$$\boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_v \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{F}_{ij}$ は粒子 j が粒子 i に与える力であり、粒子 i に関係するすべての粒子からの力の和をとっている。$\boldsymbol{F}_v$ は重力などの体積力である。モーメント $\boldsymbol{M}_i$ も同様に

$$\boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{M}_{ij} \tag{4}$$

3　接触力

3.1　接触力

粒子 j が粒子 i に与える力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ をここでは接触力に限るものとする。接触力はばね・ダッシュポット・スライダーにより構成される Voigt モデルでモデル化される。接触力は接触面の法線方向の力 $\boldsymbol{F}_n$ と接線方向の力 $\boldsymbol{F}_t$ に分けられる。

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_t \tag{5}$$

3.2　法線方向の力

法線方向の力 $\boldsymbol{F}_n$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{F}_n = -k_n \boldsymbol{\delta}_n - \eta_n \boldsymbol{v}_n \tag{6}$$

ここで k_n, η_n はそれぞれ法線方向のばね定数と粘性減衰係数である。$\boldsymbol{\delta}_n$ は粒子の接触による変位の法線方向成分であり、粒子の重なりの量で表す。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_n &= \delta_n \boldsymbol{n}_{ij} \\ \delta_n &= |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| - (R_i + R_j) \end{aligned} \tag{7}$$

$\boldsymbol{x}_i$ は粒子 i の位置ベクトルである。$\boldsymbol{n}$ は接触面の法線ベクトルで

$$\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|} \tag{8}$$

$\boldsymbol{v}_n$ は粒子間の相対速度 $\boldsymbol{v}_{ij}$ の法線方向成分である。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_n} &= (\boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}) \boldsymbol{n}_{ij} \\ \boldsymbol{v}_{ij} &= \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \end{aligned} \tag{9}$$

ばねは線形ばねモデルと非線形ばねモデルがあるが、ここでは Hertz の弾性接触理論による非線形ばねを考えると、ばね定数 $\boldsymbol{k}_n$ は次式で表される。

$$k_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^* \delta_n} \tag{10}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{E^*} &= \frac{1-{\nu_i}^2}{E_i} + \frac{1-{\nu_j}^2}{E_j} \\
\frac{1}{R^*} &= \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

E_i, ν_i はそれぞれ粒子 i のヤング率とポアソン比である。壁との衝突の場合は $R_j \to \infty$ とする (つまり $R^* = R_i$)。

粘性減衰係数 η_n は、線形ばねの場合は次式で表される。

$$
\begin{aligned}
\eta_n &= 2\alpha\sqrt{m^* k_n} \\
\alpha &= -\ln e \sqrt{\frac{1}{\ln^2 e + \pi^2}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで

$$
\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \tag{13}
$$

e は反発係数である。非線形ばねの場合は

$$
\begin{aligned}
\eta_n &= \beta\sqrt{m^* k_n} \\
\beta &= -\ln e \sqrt{\frac{5}{\ln^2 e + \pi^2}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

3.3 接線方向の力

接線方向の力 $\boldsymbol{F}_t$ は次式で表される。

$$
\boldsymbol{F}_t = -k_t \boldsymbol{\delta}_t - \eta_t \boldsymbol{v}_t \tag{15}
$$

ここで k_t, η_t はそれぞれ接線方向のばね定数と粘性減衰係数である。$\boldsymbol{\delta}_t, \boldsymbol{v}_t$ はそれぞれ粒子間の変位と相対速度の接線方向成分である。変位の接線方向成分 $\boldsymbol{\delta}_t$ は次式で与えられる。

$$
\boldsymbol{\delta}_t = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}_t dt \tag{16}
$$

ここで t_0, t_1 はそれぞれ接触始めと終わりの時刻である。相対速度の接線方向成分 $\boldsymbol{v}_t$ は次式で与えられる。

$$
\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_{ij} - \boldsymbol{v}_n + (R_i \boldsymbol{\omega}_i + R_j \boldsymbol{\omega}_j) \times \boldsymbol{n}_{ij} \tag{17}
$$

ばね定数 k_t は、Mindlin の理論により次式で表される。

$$
k_t = 8G^* \sqrt{R^* \delta_n} \tag{18}
$$

ここで

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2(2-\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2(2-\nu_j)(1+\nu_j)}{E_j} \tag{19}$$

粘性減衰係数 η_t は、$\eta_t = \eta_n$ とする。

摩擦係数を μ として、$|\boldsymbol{F}_t| > \mu|\boldsymbol{F}_n|$ の場合、接触面ですべりが生じる。その場合 $\boldsymbol{F}_t$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{F}_t = -\mu|\boldsymbol{F}_n|\boldsymbol{t}_{ij} \tag{20}$$

ここで $\boldsymbol{t}_{ij}$ は接触面の接線方向ベクトルで

$$\boldsymbol{t}_{ij} = \frac{\boldsymbol{v}_t}{|\boldsymbol{v}_t|} \tag{21}$$

4 モーメント

粒子 j が粒子 i に与えるモーメント $\boldsymbol{M}_{ij}$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{F}_t \tag{22}$$

ここで

$$\boldsymbol{R}_i = R_i \boldsymbol{n}_{ij} \tag{23}$$

参考文献

[1] 酒井幹夫, 粉体の数値シミュレーション, 丸善出版, 2012

[2] 川口, 田中, 辻, 離散要素法による流動層の数値シミュレーション (噴流層の場合), 日本機械学会論文集 (B 編), 58 巻 551 号, 1992

[3] G. Hu, Z. Hu, B. Jian, L. Liu and H. Wan, On the Determination of the Damping Coefficient of Non-linear Spring-dashpot System to Model Hertz Contact for Simulation by Discrete Element Method, Journal of Computers, Vol. 6, No. 5, 2011

[4] 中西, 後藤, 中川, 三田地, 転がり摩擦を考慮した離散要素法による水平回転円筒内の粒子群の運動シミュレーション, 日本機械学会論文集 (B 編), 65 巻 633 号, 1999