行列式

春日 悠

2009 年 4 月 8 日

目 次

1 行列式

ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積は、外積の大きさ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ で表すことができる。ベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、エディントンのイプシロン ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (i, j, k \text{ のうちどれか } 2 \text{ つが等しい}) \end{cases} \tag{1}$$

を用いると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \boldsymbol{e}_i \tag{2}$$

と表される。ここで $\boldsymbol{e}_i$ は基底ベクトルである。総和規約を用いている。

ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積は、次式のスカラー 3 重積で表される。

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{3}$$

さて、3×3 の行列 A_{ij} を考えよう。行列 A の各列をベクトルとしたとき、この 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積を行列 A の行列式 (determinant) $|A|$ であると定義する。すなわち

$$|A| = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \tag{4}$$

上の定義を任意の正方行列に一般化することはできるが、めんどくさいので、ここでは 3×3 の行列に限って考える。

2 逆行列

行列 A の行列式 $|A|$ は

$$
\begin{aligned}
|A| &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \\
&= A_{i1} \bar{A}_{1i}
\end{aligned} \tag{5}
$$

と表される。ここで

$$
\bar{A}_{1i} = \epsilon_{ijk} A_{j2} A_{k3} \tag{6}
$$

を行列 A の第 1 列第 i 行の余因子という。

余因子を成分とする行列 $\bar{A}$ を余因子行列という。A と $\bar{A}$ の積を考えると

$$
\begin{aligned}
A_{ik} \bar{A}_{kj} &= A_{i1} \bar{A}_{1j} + A_{i2} \bar{A}_{2j} + A_{i3} \bar{A}_{3j} \\
&= |A| \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{7}
$$

ここで、δ_{ij} はクロネッカーのデルタ

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{8}
$$

である。したがって

$$
\frac{1}{|A|} A_{ij} \bar{A}_{ij} = \delta_{ij} \tag{9}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{ik} A_{kj} &= A_{1j} \bar{A}_{i1} + A_{2j} \bar{A}_{i2} + A_{3j} \bar{A}_{j3} \\
&= |A| \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{10}
$$

より

$$
\frac{1}{|A|} \bar{A}_{ik} A_{kj} = \delta_{ij} \tag{11}
$$

以上より、$\bar{A}_{ij}/|A|$ は行列 A の逆行列 A^{-1} の成分を表し、$|A| = 0$ では行列 A の逆行列が存在しないことがわかる。

3 行列式の性質

行列 A の行列式 $|A|$ は、次式のように表すことができる。

$$
\begin{aligned}
|A| &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \\
&= \epsilon_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn} \delta_{l1} \delta_{m2} \delta_{n3} \\
&= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \epsilon_{lmn} \delta_{l1} \delta_{m2} \delta_{n3} \\
&= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn}
\end{aligned} \tag{12}
$$

ここで、$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ および $|\delta_{ij}| = 1$ であることを利用した。

対角行列の行列式は対角要素の積である。対角行列 A の成分は、スカラー α_i により $A_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$ と表すことができるので

$$\begin{aligned}|A| &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \\ &= \epsilon_{123} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\end{aligned} \tag{13}$$

行列の 1 つの列を α 倍すると、その行列式は α 倍になる。たとえば、行列 A の第 2 列に α をかけたとすると

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} A_{i1} \alpha A_{j2} A_{k3} &= \alpha \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \\ &= \alpha |A|\end{aligned} \tag{14}$$

行列のある列が 2 つの列の和に分解できるとき、その行列式はその列を分解した列にそれぞれ置き換えた行列の行列式の和で表される。たとえば、行列 A の第 2 列が $A_{i2} = B_{i2} + C_{i2}$ と表せたとして、行列 A の第 2 列を B_{i2}, C_{i2} で置き換えたものをそれぞれ B, C とすると

$$\begin{aligned}|A| &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \\ &= \epsilon_{ijk} A_{i1} (B_{j2} + C_{j2}) A_{k3} \\ &= \epsilon_{ijk} A_{i1} B_{j2} A_{k3} + \epsilon_{ijk} A_{i1} C_{j2} A_{k3} \\ &= |B| + |C|\end{aligned} \tag{15}$$

行列の 2 つの列を入れ替えると、その行列式の符号が変わる。たとえば、行列 A の第 2 列と第 3 列を入れ替えると

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j3} A_{k2} &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{k2} A_{j3} \\ &= -\epsilon_{ikj} A_{i1} A_{k2} A_{j3} \\ &= -|A|\end{aligned} \tag{16}$$

行列のどれか 2 つの列が等しい場合、その行列式は 0 である。これは ϵ_{ijk} の性質より明らかである。

行列のある列に他の列の線形結合を加えても、その行列式の値は変わらない。これは、以上で見てきた行列式の性質から明らかである。

2 つの行列の積の行列式は、それぞれの行列式の積と等しい。行列 A, B の積の行列式を考えると

$$\begin{aligned}|AB| &= \epsilon_{ijk} A_{il} B_{l1} A_{jm} B_{m2} A_{kn} B_{n3} \\ &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \epsilon_{lmn} B_{l1} B_{m2} B_{n3} \\ &= |A||B|\end{aligned} \tag{17}$$

転置行列の行列式は、もとの行列の行列式に等しい。つまり、行列 A について

$$|A| = |A^T| \tag{18}$$

である。これは、式 (12) から明らかである。

直交行列の行列式は ± 1 である。行列 A が直交行列であるとき

$$A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \tag{19}$$

である。これより

$$|AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 = 1 \tag{20}$$

したがって

$$|A| = \pm 1 \tag{21}$$

4 積分変数の変換

関数 $f(x)$ の積分を考えるとき、もし $x = \phi(X)$ と表すことができるなら、$f(X) = f(\phi(X))$ として、x による積分の代わりに X による積分として考えることができる。このとき、x における積分範囲を Ω、X における積分範囲を Ω' とすると

$$dx = \frac{dx}{dX}dX \tag{22}$$

より

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\Omega'} f(X)\frac{dx}{dX}dX \tag{23}$$

3 変数関数の積分の場合を考えよう。関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ を考える。ここで

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(X_1, X_2, X_3) \\ x_2 &= \phi_2(X_1, X_2, X_3) \\ x_3 &= \phi_3(X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \tag{24}$$

と表すことができるとしよう。このとき、関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ の積分

$$\int_\Omega f(x_1, x_2, x_3)dv \tag{25}$$

を考える。ここで dv は、変数 x_1, x_2, x_3 を座標とする座標系における微小体積である。

座標系 (x_1, x_2, x_3) における微小ベクトル $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{y}$, $d\boldsymbol{z}$ を考える。微小体積 dv は、$d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{y}$, $d\boldsymbol{z}$ の作る体積と考えることができるが、それは $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{y}$, $d\boldsymbol{z}$ を列ベクトルとした行列の行列式として与えられる。したがって

$$dv = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{vmatrix} \tag{26}$$

座標系 (X_1, X_2, X_3) を考え、その座標系における微小ベクトルを $d\boldsymbol{X}$, $d\boldsymbol{Y}$, $d\boldsymbol{Z}$ としよう。それらが作る微小体積を dV とする。このとき、連鎖律より

$$\begin{bmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 & dY_1 & dZ_1 \\ dX_2 & dY_2 & dZ_2 \\ dX_3 & dY_3 & dZ_3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

ここで

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{28}$$

をヤコビ行列という。ヤコビ行列を J と表すことにすると、微小体積 dv は次式のようになる。

$$\begin{aligned} dv &= \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dX_1 & dY_1 & dZ_1 \\ dX_2 & dY_2 & dZ_2 \\ dX_3 & dY_3 & dZ_3 \end{vmatrix} \\ &= |J| dV \end{aligned} \tag{29}$$

したがって、関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ の積分は

$$\int_\Omega f(x_1, x_2, x_3) dv = \int_{\Omega'} f(X_1, X_2, X_3) |J| dV \tag{30}$$

普通、積分変数の変換においては、変数によって表示の仕方が異なるだけで積分領域自体は同じであることが想定される。上の議論でいえば、Ω と Ω' は同じ領域の別の表現であると考えられる。だが、上の議論においては、Ω と Ω' は同じ領域であるという条件は課していない。変数間で一対一の対応が取れていればいいのである。だから、次のような議論も上の議論同様に展開できる。

変数 x_1, x_2, x_3 と X_1, X_2, X_3 の代わりに、領域 Ω の点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と領域 Ω' の点の位置ベクトル $\boldsymbol{X}$ を考え、2 つが次式で関係付けられるとする。

$$\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}) \tag{31}$$

関数 ϕ によって $\boldsymbol{X}$ が $\boldsymbol{x}$ に移される、つまり関数 ϕ を、領域 Ω' を Ω へ移す「運動」と考える。それぞれの領域の微小ベクトルを $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{X}$ とすると、その成分は

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = J_{ij} dX_j \tag{32}$$

で関係付けられる。領域 Ω における微小ベクトルを $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{y}$, $d\boldsymbol{z}$、領域 Ω' における微小ベクトルを $d\boldsymbol{X}$, $d\boldsymbol{Y}$, $d\boldsymbol{Z}$ とすると、ベクトルが作る体積はスカラー 3 重積 (式 (3)) で得られるから

$$
\begin{aligned}
dv &= d\boldsymbol{x} \cdot (d\boldsymbol{y} \times d\boldsymbol{z}) \\
&= \epsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k \\
&= \epsilon_{ijk} J_{il} J_{jm} J_{kn} dX_l dY_m dZ_n \\
&= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} J_{il} J_{jm} J_{kn} \epsilon_{lmn} dX_l dY_m dZ_n \\
&= |J| \left\{ d\boldsymbol{X} \cdot (d\boldsymbol{Y} \times d\boldsymbol{Z}) \right\} \\
&= |J| dV
\end{aligned}
\tag{33}
$$

したがって、スカラー関数 $f(\boldsymbol{x})$ の積分は、$f(\boldsymbol{X}) = f(\phi(\boldsymbol{X}))$ として

$$
\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) dv = \int_{\Omega'} f(\boldsymbol{X}) |J| dV \tag{34}
$$

参考文献

[1] 石原繁, テンソル -科学技術のために-, 裳華房, 1991

[2] 甘利俊一, 金谷健一, 理工学者が書いた数学の本 1 線形代数, 講談社, 1987

[3] 高木貞治, 解析概論 改訂第三版, 岩波書店, 1983