円筒座標系におけるナビエ・ストークス方程式

春日 悠

2010 年 8 月 22 日

目 次

1　はじめに

円筒座標系におけるナビエ・ストークス方程式の成分表示を導く。まず、より一般的である曲線座標系において考える。続いて、それに制限を加えた形の直交曲線座標系を考え、その具体例の一つとして円筒座標系を考える。それぞれについて、簡単なものから、連続の式、スカラー輸送方程式、ナビエ・ストークス方程式を導く。最後に、円筒座標系の特殊な例として、軸対称問題の表示式を導く。

2　曲線座標系

2.1　曲線座標系における微分

共変基底を $\boldsymbol{e}_i$ とする曲線座標系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) における微分は、以下のように定義される。

スカラー場 ϕ の勾配

$$\nabla\phi = g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial\xi^j}\boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の勾配

$$\nabla\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial\xi^j} + \Gamma^i_{jk}u^k\right)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \tag{2}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(Ju^i\right) \tag{3}$$

テンソル場 T の発散

$$\nabla\cdot T = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial\xi^j} + \Gamma^i_{jk}T^{kj} + \Gamma^j_{jk}T^{ik}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{4}$$

ここで、Γ^i_{jk} は第 2 種クリストッフェル記号で

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial\xi^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial\xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial\xi^l}\right) \tag{5}$$

g_{ij} は計量テンソルの共変成分で、次式で与えられる。

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{6}$$

その成分行列の行列式を g とすると、ヤコビアン J は

$$J = \sqrt{g} \tag{7}$$

である。g^{ij} は計量テンソルの反変成分で、その成分行列は g_{ij} の成分行列の逆行列として与えられ、反変基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ により次式で表される。

$$g^{ij} = \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j \tag{8}$$

共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は、位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると、次式で定義される。

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i} \tag{9}$$

反変基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ は、共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ から次のように求まる。

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{10}$$

また、δ^i_j をクロネッカーのデルタとして、次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta^i_j \tag{11}$$

2.2 連続の式

連続の式は、密度を ρ、速度ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると、次式で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{12}$$

曲線座標系における成分表示は、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \rho u^i \right) = 0 \tag{13}$$

2.3 スカラー輸送方程式

スカラー輸送方程式は、スカラー場を ϕ、拡散係数を Γ 、生成を S とすると、次式で表される。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \tag{14}$$

曲線座標系における成分表示は、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \rho \phi u^i \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \right) + S \tag{15}$$

2.4 ナビエ・ストークス方程式

非圧縮性ニュートン流体を想定する。圧力を p 、粘性係数を μ、変形速度テンソルを D、物体力ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とすると、ナビエ・ストークス方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \boldsymbol{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2 \mu D) + \boldsymbol{b} \tag{16}$$

変形速度テンソルは、次式で表される。

$$2D = \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \tag{17}$$

粘性係数が場所によらず一定ならば、動粘性係数を $\nu = \mu/\rho$ として

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{b} \tag{18}$$

式 (18) の曲線座標系における成分表示は、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + u^j \nabla_j u^i = -\frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \nu \nabla^2 u^i + \frac{1}{\rho} b^i \tag{19}$$

ここで

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} + \Gamma^i_{jk} u^k \tag{20}$$

$$\nabla^2 u^i = \frac{\partial \nabla_j u^i}{\partial \xi^j} + \Gamma^i_{jk} \nabla_j u^k + \Gamma^j_{jk} \nabla_k u^i \tag{21}$$

また、式 (16) の曲線座標系における成分表示は、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + \nabla_j (\rho u^i u^j) = -g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \nabla_j (2\mu D^{ij}) + b^i \tag{22}$$

ここで

$$\begin{aligned} \nabla_j (\rho u^i u^j) &= \rho u^j \nabla_j u^i + u^i \nabla_j (\rho u^j) \\ &= \rho u^j \nabla_j u^i + u^i \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J \rho u^j) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\nabla_j (2\mu D^{ij}) = \frac{\partial}{\partial \xi^j} (2\mu D^{ij}) + \Gamma^i_{jk} 2\mu D^{kj} + \Gamma^j_{jk} 2\mu D^{ik} \tag{24}$$

$$2D^{ij} = \nabla_j u^i + \nabla_i u^j \tag{25}$$

3 直交曲線座標系

3.1 直交曲線座標系における微分

共変基底ベクトルどうしが直交している曲線座標系を、直交曲線座標系という。直交曲線座標 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) を考えよう。共変基底を $\boldsymbol{e}_i$ とする。

共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を正規化したベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \frac{1}{h_1} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 &= \frac{1}{h_2} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 &= \frac{1}{h_3} \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{26}$$

とおく。ここで $h_i = |\boldsymbol{e}_i|$ である。ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の成分を $\boldsymbol{a}_i$ の線形結合で次のように表す。

$$\boldsymbol{u} = \bar{u}_1 \boldsymbol{a}_1 + \bar{u}_2 \boldsymbol{a}_2 + \bar{u}_3 \boldsymbol{a}_3 \tag{27}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= h_1 u^1 \\
\bar{u}_2 &= h_2 u^2 \\
\bar{u}_3 &= h_3 u^3
\end{aligned} \tag{28}
$$

テンソル場の成分についても同様に表す。

$$
T = \bar{T}_{11} \boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 + \bar{T}_{12} \boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_2 \cdots \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{T}_{11} &= h_1 h_1 T^{11} \\
\bar{T}_{12} &= h_2 h_2 T^{12} \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{30}
$$

計量テンソルの反変成分 g_{ij} の成分行列は対角行列で表され、その対角成分は

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = (h_1)^2 \\
g_{22} &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = (h_2)^2 \\
g_{33} &= \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = (h_3)^2
\end{aligned} \tag{31}
$$

この逆行列で表される g^{ij} の成分行列もまた対角行列であり、その対角成分は

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{(h_1)^2} \\
g^{22} &= \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{(h_2)^2} \\
g^{33} &= \frac{1}{g_{33}} = \frac{1}{(h_3)^2}
\end{aligned} \tag{32}
$$

また、ヤコビアン J は

$$
J = \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{33}
$$

である。

式 (10) より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^1 &= \frac{1}{(h_1)^2} \boldsymbol{e}_1 \\
\boldsymbol{e}^2 &= \frac{1}{(h_2)^2} \boldsymbol{e}_2 \\
\boldsymbol{e}^3 &= \frac{1}{(h_3)^2} \boldsymbol{e}_3
\end{aligned} \tag{34}
$$

たとえば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^1 &= \frac{1}{(h_1)^2} \boldsymbol{e}_1 \\
h_1 \boldsymbol{e}^1 &= \frac{1}{h_1} \boldsymbol{e}_1 \\
&= \boldsymbol{a}_1
\end{aligned} \tag{35}
$$

であり、同様にして

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= h_1 \boldsymbol{e}^1 \\
\boldsymbol{a}_2 &= h_2 \boldsymbol{e}^2 \\
\boldsymbol{a}_3 &= h_3 \boldsymbol{e}^3
\end{aligned}
\tag{36}
$$

　クリストッフェル記号は、以下のように計算できる ($\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ なので、18 個だけ計算すればよい)。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{l1}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^1} + \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^1} \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \log g_{11}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \log g_{22} \\
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \log g_{33}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{l1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \log g_{11}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \log g_{11} \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \log g_{22} \\
\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \log g_{22} \\
\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \log g_{33} \\
\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \log g_{33}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{l2}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi^l} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi^1} \\
&= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi^1}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} \\
\Gamma^2_{11} &= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^2} \\
\Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} \\
\Gamma^3_{11} &= -\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi^3} \\
\Gamma^3_{22} &= -\frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi^3}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

最後に

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{l2}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial g_{l3}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial \xi^l} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{43}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= 0 \\
\Gamma^3_{12} &= 0
\end{aligned}
\tag{44}
$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{ii} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \log g_{ii} \\
\Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \log g_{ii} \\
\Gamma^i_{jj} &= -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial \xi^i} \\
\Gamma^i_{jk} &= 0
\end{aligned}
\tag{45}
$$

ただし、i, j, k について総和をとらず、$i \neq j \neq k$ である。

直交曲線座標系における微分を $\boldsymbol{a}_i$ について表すと、以下のようになる。

スカラー場 ϕ の勾配

$$
\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1} \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2} \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^3} \boldsymbol{a}_3
\tag{46}
$$

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の勾配

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{h_i}{h_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\bar{u}_i}{h_i} \right) + \Gamma^i_{jk} \frac{\bar{u}_k}{h_k} \right\} \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_j \tag{47}$$

ただし、h_i, h_j, h_k については総和をとらない。

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^1} (h_2 h_3 \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (h_1 h_3 \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} (h_1 h_2 \bar{u}_3) \right\} \tag{48}$$

テンソル場 T の発散

$$\nabla \cdot T = h_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\bar{T}_{ij}}{h_i h_j} \right) + \Gamma^i_{jk} \frac{\bar{T}_{kj}}{h_k h_j} + \Gamma^j_{jk} \frac{\bar{T}_{ik}}{h_i h_k} \right\} \boldsymbol{a}_i \tag{49}$$

ただし、h_i, h_j, h_k については総和をとらない。

3.2 連続の式

表記を簡単にするために、次の記号を導入する。

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_1 &= h_1 h_2 \bar{u}_1 \\ \bar{\bar{u}}_2 &= h_2 h_3 \bar{u}_2 \\ \bar{\bar{u}}_3 &= h_1 h_3 \bar{u}_3 \end{aligned} \tag{50}$$

直交曲線座標系における連続の式の成分表示は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\rho \bar{\bar{u}}_i) = 0 \tag{51}$$

3.3 スカラー輸送方程式

表記を簡単にするために、次の記号を導入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^1} &= \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^2} &= \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^3} &= \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \end{aligned} \tag{52}$$

直交曲線座標系におけるスカラー輸送方程式の成分表示は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\rho \phi \bar{\bar{u}}_i) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}^i} \right) + S \tag{53}$$

3.4 ナビエ・ストークス方程式

式 (18) の直交曲線座標系における成分表示は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial t} + \bar{u}_j \nabla_j \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho h_i}\frac{\partial p}{\partial \xi^i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \frac{1}{\rho}\bar{b}_i \tag{54}$$

ここで

$$\nabla_j \bar{u}_i = \frac{h_i}{h_j}\left\{\frac{\partial}{\xi^j}\left(\frac{\bar{u}_i}{h_i}\right) + \Gamma^i_{jk}\frac{\bar{u}_k}{h_k}\right\} \tag{55}$$

$$\nabla^2 \bar{u}_i = h_i \left\{\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\frac{\nabla_j \bar{u}_i}{h_i h_j}\right) + \Gamma^i_{jk}\frac{\nabla_j \bar{u}_k}{h_k h_j} + \Gamma^j_{jk}\frac{\nabla_k \bar{u}_i}{h_i h_k}\right\} \tag{56}$$

ただし、h_i, h_j, h_k については総和をとらない。

式 (16) の直交曲線座標系における成分表示は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho \bar{u}^i}{\partial t} + \nabla_j(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho h_i}\frac{\partial p}{\partial \xi^i} + \nabla_j(2\mu \bar{D}_{ij}) + \bar{b}_i \tag{57}$$

ここで

$$\nabla_j(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \rho \bar{u}_j \nabla_j \bar{u}_i + \bar{u}_i \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\rho \bar{\bar{u}}_j) \tag{58}$$

$$\nabla_j(2\mu \bar{D}_{ij}) = h_i \left\{\frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\frac{2\mu \bar{D}_{ij}}{h_i h_j}\right) + \Gamma^i_{jk}\frac{2\mu \bar{D}_{kj}}{h_k h_j} + \Gamma^j_{jk}\frac{2\mu \bar{D}_{ik}}{h_i h_k}\right\} \tag{59}$$

$$2\bar{D}_{ij} = \nabla_j \bar{u}^i + \nabla_i \bar{u}^j \tag{60}$$

ただし、h_i, h_j, h_k については総和をとらない。

4 円筒座標系

4.1 円筒座標系における微分

円筒座標系 $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (r, \theta, z)$ を考えよう。共変基底を $\boldsymbol{e}_i$ とする。位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると、デカルト座標系における成分は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \tag{61}$$

共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は式 (9) で与えられるので、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の成分はそれぞれ次のようになる。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

共変基底ベクトルが互いに直交するので、円筒座標系は直交曲線座標系である。正規基底ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の成分はそれぞれ

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

式 (26) より

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= r \\ h_3 &= 1 \end{aligned} \tag{64}$$

計量テンソルの反変成分 g_{ij} は式 (31) より

$$\begin{aligned} g_{11} &= (h_1)^2 = 1 \\ g_{22} &= (h_2)^2 = r^2 \\ g_{33} &= (h_3)^2 = 1 \end{aligned} \tag{65}$$

クリストッフェル記号は、式 (45) より

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^1_{22} &= -r \end{aligned} \tag{66}$$

上記以外の値は 0 である。

円筒座標系における微分は、以下のように表される。

スカラー場 ϕ の勾配

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{a}_3 \tag{67}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の勾配 $\nabla\boldsymbol{u}$ の正規基底ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ についての成分

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial\theta} - \dfrac{\bar{u}_2}{r} & \dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial\theta} + \dfrac{\bar{u}_1}{r} & \dfrac{\partial\bar{u}_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{68}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\bar{u}_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\theta} + \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial z} \tag{69}$$

テンソル場 T の発散 $\nabla \cdot T$ の正規基底ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ についての成分

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{T}_{11}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial z} + \dfrac{\bar{T}_{11}}{r} - \dfrac{\bar{T}_{22}}{r} \\ \\ \dfrac{\partial \bar{T}_{21}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{T}_{22}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{T}_{23}}{\partial z} + \dfrac{\bar{T}_{12}}{r} + \dfrac{\bar{T}_{21}}{r} \\ \\ \dfrac{\partial \bar{T}_{31}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{T}_{32}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{T}_{33}}{\partial z} + \dfrac{\bar{T}_{31}}{r} \end{pmatrix} \tag{70}$$

4.2 連続の式

単位基底についてのベクトルの成分 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ を (u_r, u_θ, u_z) と表示する。円筒座標系における連続の式の成分表示は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \tag{71}$$

4.3 スカラー輸送方程式

円筒座標系におけるスカラー輸送方程式の成分表示は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho\phi u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\phi u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\phi u_z) = \\ &\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial z}) + S \end{aligned} \tag{72}$$

4.4 ナビエ・ストークス方程式

式 (18) の円筒座標系における成分表示は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = \\ &\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + b_r \\ &\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \\ &\quad -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial u_\theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) + b_\theta \\ &\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ &\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + b_z \end{aligned} \tag{73}$$

式 (16) の円筒座標系における成分表示は、次式のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_r u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) - \frac{\rho u_\theta^2}{r} = \\
&\quad - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta\right)\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right\} - \frac{\mu u_r}{r^2} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + b_r \\
&\frac{\partial \rho u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_\theta u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_\theta u_z) + \frac{\rho u_r u_\theta}{r} = \\
&\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right\} + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{2\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\right\} \\
&\quad + \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2\mu u_\theta}{r^2} + b_\theta \\
&\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_z u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_z u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z) = \\
&\quad - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right\} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + r\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + b_z
\end{aligned}
\tag{74}
$$

5 軸対称問題

5.1 軸対称問題

円筒座標系で表示された問題において、周方向 (θ 方向) の物理量の変化を無視できる場合を、軸対称問題という。軸対称問題では、物理量の周方向成分の方程式を解く必要がないので、2 次元問題として扱える。また、周方向に関する微分は 0 になる。

5.2 連続の式

軸対称問題における連続の式の成分表示は、次式のようになる。

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \tag{75}
$$

5.3 スカラー輸送方程式

軸対称問題におけるスカラー輸送方程式の成分表示は、次式のようになる。

$$
\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho\phi u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\phi u_z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial z}) + S \tag{76}
$$

5.4 ナビエ・ストークス方程式

式 (18) の軸対称問題における成分表示は、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = \\
&\qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}\right) + b_r \\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\
&\qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + b_z
\end{aligned} \tag{77}$$

式 (16) の軸対称問題における成分表示は、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) - \frac{\rho u_\theta^2}{r} = \\
&\qquad -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{2\mu}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right\} - \frac{\mu u_r}{r^2} + b_r \\
&\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_z u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z) = \\
&\qquad -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right\} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + b_z
\end{aligned} \tag{78}$$

参考文献

[1] 石原繁, テンソル -科学技術のために-, 裳華房, 1991

[2] 大橋秀雄, 流体力学 (1), コロナ社, 1982

[3] H. Lamb, Hydrodynamics, Sixth Edition, Dover, 1945