曲線座標系におけるひずみ

春日 悠

2009 年 3 月 21 日

目 次

1　変形勾配テンソル　1

2　埋め込み座標系　2

3　グリーン・ラグランジュひずみ　3

4　微小ひずみ　4

1　変形勾配テンソル

物体 B を考える。B を構成する点の位置ベクトル $\boldsymbol{X}$ とし、変形後のそれの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。変形前の B 中の微小ベクトル $d\boldsymbol{X}$ が、B の変形に伴って $d\boldsymbol{x}$ になるとき

$$d\boldsymbol{x} = F \cdot d\boldsymbol{X} \tag{1}$$

と表す。ここで F は変形勾配テンソルである。

デカルト座標系を考え、その基底を $\boldsymbol{e}_i$ とする。物体 B 中の変形前後の微小ベクトルをそれぞれ $d\boldsymbol{X} = dX_i\boldsymbol{e}_i$, $d\boldsymbol{x} = dx_i\boldsymbol{e}_i$ とすると

$$F = F_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{2}$$

とすれば

$$\begin{aligned} dx_i\boldsymbol{e}_i &= (F_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (dX_k\boldsymbol{e}_k) \\ &= F_{ij}dX_j\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{3}$$

これより

$$dx_i = F_{ij}dX_j, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{4}$$

変形前後で、物体の位置ベクトルを表示する座標系が異なっていてもよい。変形前の位置ベクトルを表す座標系の基底を $\boldsymbol{E}_i$、変形後のそれを $\boldsymbol{e}_i$ とする。すなわち、

$d\boldsymbol{X} = dX_i\boldsymbol{E}_i$, $d\boldsymbol{x} = dx_i\boldsymbol{e}_i$ とすると

$$F = F_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_j \tag{5}$$

とすれば

$$\begin{aligned} dx_i\boldsymbol{e}_i &= (F_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_j)\cdot(dX_k\boldsymbol{E}_k) \\ &= F_{ij}dX_j\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{6}$$

これより

$$dx_i = F_{ij}dX_j, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{7}$$

より一般化して、曲線座標で考えよう。$d\boldsymbol{X} = dX^i\boldsymbol{E}_i$, $d\boldsymbol{x} = dx^i\boldsymbol{e}_i$ として

$$F = F^i{}_j\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}^j \tag{8}$$

とすると

$$\begin{aligned} dx^i\boldsymbol{e}_i &= (F^i{}_j\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}^j)\cdot(dX^k\boldsymbol{E}_k) \\ &= F^i{}_jdX^j\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{9}$$

したがって

$$dx^i = F^i{}_jdX^j, \quad F^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \tag{10}$$

2 埋め込み座標系

物体 B に座標系を埋め込んで、その座標系によって変形を記述することを考えよう。座標系を「埋め込む」というのは、B の変形にしたがって座標系が変形するということである。変形前の物体の位置ベクトルを表示する座標系の基底を $\boldsymbol{E}_i$ とし、変形後のそれを $\boldsymbol{e}_i$ としよう。これは、変形前後で物体の記述に使用する座標系が単に異なるということではなくて、変形前の基底 $\boldsymbol{E}_i$ が B の変形に伴って $\boldsymbol{e}_i$ に変換されるということである。この場合、変形前の基底ベクトル同士が直交していても、変形後の基底ベクトル同士が直交するとは限らない。したがって、一般には曲線座標で考えることになる。

物体 B に埋め込んだ座標系が B の変形に伴って変形するということは、B 中のベクトルが変形しても、その成分は変わらないと考えるということである。たとえば、わたしたちの生活している空間が伸び縮みしたとしても、ものさしも一緒に伸び縮みするのであれば、1 m のものは 1 m のものとして見え続ける。基底はものさしなので、それが物体とともに変形すれば、それで測った場合の物体中のベクトルの見え方は変わらない。つまり、成分は変わらない。

変形前後の座標をそれぞれ (X^1, X^2, X^3), (x^1, x^2, x^3) とすると

$$x^i = X^i \tag{11}$$

である。これより

$$
\begin{aligned}
F \cdot \boldsymbol{E}_i &= (\frac{\partial x^i}{\partial X^j}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}^j) \cdot (\boldsymbol{E}_i) \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial X^i}\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial X^i}\boldsymbol{e}_i \\
&= \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\tag{12}
$$

つまり

$$
\boldsymbol{e}_i = F \cdot \boldsymbol{E}_i, \quad F = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}^i \tag{13}
$$

3　グリーン・ラグランジュひずみ

物体 B 中の変形前における線素を ds とし、変形後のそれを dS とする。それぞれの 2 乗の差をとると

$$
\begin{aligned}
ds^2 - dS^2 &= d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{X} \\
&= (F \cdot d\boldsymbol{X}) \cdot (F \cdot d\boldsymbol{X}) - d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{X} \\
&= d\boldsymbol{X} \cdot F^T \cdot F \cdot d\boldsymbol{X} - d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{X} \\
&= d\boldsymbol{X} \cdot (F^T \cdot F - I) \cdot d\boldsymbol{X} \\
&= d\boldsymbol{X} \cdot 2E \cdot d\boldsymbol{X}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ここで I は単位テンソルであり

$$
E = \frac{1}{2}(F^T \cdot F - I) \tag{15}
$$

はグリーン・ラグランジュひずみである。

さて、グリーン・ラグランジュひずみを曲線座標系において表現することを考えよう。埋め込み座標系を導入するとして、グリーン・ラグランジュひずみの共変成分は

$$
\begin{aligned}
E \cdot \boldsymbol{E}_j &= \frac{1}{2}(F^T \cdot \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{E}_j) \\
\boldsymbol{E}_i \cdot E \cdot \boldsymbol{E}_j &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j) \\
&= \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) = E_{ij}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ここで G_{ij}, g_{ij} はそれぞれ変形前・変形後における計量テンソルの共変成分である。つまり、グリーン・ラグランジュひずみの共変成分は、変形前後の計量テンソルの共変成分のみで表される。

4　微小ひずみ

物体 B の変位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると、B の変形前後の位置ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}$ から

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \tag{17}$$

変形前の配置に関する $\boldsymbol{u}$ の勾配は

$$\nabla \boldsymbol{u} = F - I \tag{18}$$

したがって、変形勾配は次式で表される。

$$F = \nabla \boldsymbol{u} + I \tag{19}$$

そのとき、グリーン・ラグランジュひずみは

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(F^T \cdot F - I) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T \cdot \nabla \boldsymbol{u}\right\} \end{aligned} \tag{20}$$

ところで、埋め込み座標を用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i &= F \cdot \boldsymbol{E}_i \\ &= (\nabla \boldsymbol{u} + I) \cdot \boldsymbol{E}_i \end{aligned} \tag{21}$$

であるので、変形後の配置の計量テンソル g_{ij} は

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \\ &= (\nabla \boldsymbol{u} + I) \cdot \boldsymbol{E}_i \cdot (\nabla \boldsymbol{u} + I) \cdot \boldsymbol{E}_j \\ &= \boldsymbol{E}_i \cdot \left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T \cdot (\nabla \boldsymbol{u})^T + I\right\} \cdot \boldsymbol{E}_j \end{aligned} \tag{22}$$

グリーン・ラグランジュひずみの共変成分は、式 (16) より

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \boldsymbol{E}_i \cdot E \cdot \boldsymbol{E}_j \\ &= \boldsymbol{E}_i \cdot \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T \cdot (\nabla \boldsymbol{u})^T + I - I\right\} \cdot \boldsymbol{E}_j \\ &= \boldsymbol{E}_i \cdot \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T + (\nabla \boldsymbol{u})^T \cdot (\nabla \boldsymbol{u})^T\right\} \cdot \boldsymbol{E}_j \end{aligned} \tag{23}$$

したがって、式 (20) が得られる。

式 (20) の右辺最後の式の第 3 項を無視すると、微小ひずみ ϵ が得られる。

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right\} \tag{24}$$

ベクトル $\boldsymbol{u}$ の共変微分は、方向微分を用いると

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^i} \cdot \boldsymbol{E}_j \tag{25}$$

で与えられる。したがって、曲線座標系における微小ひずみ ϵ の共変成分は次式のようになる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^i} \cdot \boldsymbol{E}_j + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^j} \cdot \boldsymbol{E}_i\right) \tag{26}$$

参考文献

[1] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992

[2] 北川浩, 瀬口靖幸, 富田佳宏, 大ひずみ大変形の増分理論とそれによる有限要素法, 日本機械学会論文集, 1972

[3] 石原繁, テンソル -科学技術のために-, 裳華房, 1991