曲線座標

春日 悠

2010 年 8 月 22 日

目 次

1 曲線座標 **1**

1.1 曲線座標とは 1

1.2 直線上の座標 1

1.3 曲線上の座標 1

1.4 平面上の座標 2

1.5 曲面上の座標 2

2 ベクトルの成分 **2**

2.1 反変と共変 2

2.2 新しい表記の導入 3

3 ベクトルの内積 **4**

3.1 正規直交デカルト座標系における内積 4

3.2 曲線座標系における内積 5

4 テンソル **7**

4.1 テンソルの成分 7

4.2 計量テンソル 9

5 座標変換 **10**

5.1 ベクトルの成分の座標変換 10

5.2 テンソルの成分の座標変換 12

6 ベクトルの外積 **13**

6.1 デカルト座標系における外積 13

6.2 曲線座標系における外積 13

7　微分 **15**
7.1　スカラー場の勾配 15
7.2　ベクトル場の勾配 16
7.3　ベクトルの平行移動 16
7.4　クリストッフェル記号 17
7.5　ベクトル場の共変微分 20
7.6　テンソルの共変微分 23
7.7　ベクトル場の発散 24
7.8　スカラー場のラプラシアン 26
7.9　回転 26

1　曲線座標

1.1　曲線座標とは

デカルト座標では，直線の軸によって空間の位置を表す．曲線の軸によって空間の位置を表すのが，曲線座標である．極座標はその一例である．曲線座標は，球面など，曲がった形状の上での力学を記述したりするのに適している．

1.2　直線上の座標

3 次元空間を考えよう．その中に直線が 1 つある．空間にデカルト座標系を設定する．直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，直線上に設定した座標系で表現することを考える．その座標を ξ で表すことにすると，直線の式は次のようになる．

$$\boldsymbol{x} = \xi \boldsymbol{e}_\xi + \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_\xi$ は直線の方向を表すベクトルであり，直線上の座標系の基底ベクトルである．$\boldsymbol{x}_0$ は直線上の座標の原点を表す位置ベクトルである．

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\xi$ は，次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{e}_\xi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} \tag{2}$$

1.3　曲線上の座標

直線の代わりに曲線を考えてみよう．曲線の式を次式で表す．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\xi) \tag{3}$$

曲線上の座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\xi$ は，曲線の接線方向ベクトルとして，次のように定義できる．

$$\boldsymbol{e}_\xi(\xi) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(\xi)}{\partial \xi} \tag{4}$$

一般に，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\xi$ は位置によって異なる．

1.4　平面上の座標

今度は，平面の場合を考えよう．平面上の座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ とし，原点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_0$ としよう．座標を ξ，η で表すと，平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は次式のようになる．

$$\boldsymbol{x} = \xi \boldsymbol{e}_\xi + \eta \boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{x}_0 \tag{5}$$

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ は，次のように表せる．

$$\boldsymbol{e}_\xi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{e}_\eta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta} \tag{6}$$

1.5　曲面上の座標

最後に，曲面上の座標を考える．3 次元空間に曲面があり，曲面の式が次のように表されるとする．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\xi, \eta) \tag{7}$$

この曲面上の座標系の基底を，曲線上の場合と同様に，次のように定義する．

$$\boldsymbol{e}_\xi(\xi, \eta) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{e}_\eta(\xi, \eta) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \tag{8}$$

一般に，$\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ は位置によって変化する．

上で見たような，曲線上や曲面上の座標のように，座標軸を曲線として設定した座標のことを曲線座標という．

2　ベクトルの成分

2.1　反変と共変

2 次元のベクトル $\boldsymbol{v}$ がある．2 次元直交座標系 (x, y) を考え，その基底を $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ とする．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分をそれぞれ v_x，v_y とする．

さて，そもそもベクトルの成分とはなにか．考え方は 2 つある．

1. ベクトルを，座標系の基底ベクトルの線形結合で表したときの係数．すなわち，次式を満たす v_x，v_y．

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y \tag{9}$$

2. 基底ベクトルの方向の量．すなわち，次式で求められる v_x，v_y．

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_x & = & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_x \\ v_y & = & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_y \end{array}\right. \tag{10}$$

今度は，座標軸が直交していない座標系 (斜めに交わっているので斜交座標という) を考えよう．2 次元斜交座標系 (ξ,η) を考え，その基底を $\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ とする．この場合，一般に基底ベクトルどうしの内積は 0 にならない．この座標系におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分は，上で述べた 2 つの方法で定義できる．

1. ベクトルを，座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ の線形結合で表したときの係数．すなわち，次式を満たす v_ξ，v_η．

$$\boldsymbol{v} = v_\xi\boldsymbol{e}_\xi + v_\eta\boldsymbol{e}_\eta \tag{11}$$

2. 基底の方向の量．すなわち，次式で求められる v'_ξ，v'_η．

$$\left\{\begin{array}{lcl} v'_\xi & = & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\xi \\ v'_\eta & = & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\eta \end{array}\right. \tag{12}$$

第 1 の成分 v_ξ，v_η と，第 2 の成分 v'_ξ，v'_η は，一般に一致しない．つまり

$$\boldsymbol{v} \neq v'_\xi\boldsymbol{e}_\xi + v'_\eta\boldsymbol{e}_\eta \tag{13}$$

第 1 の成分 v_ξ，v_η を，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分という．一方，第 2 の成分 v'_ξ，v'_η は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の共変成分と呼ぶ．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ を，その共変成分 v'_ξ，v'_η を係数とした線形結合で表すように，ベクトルを定めることができる．

$$\boldsymbol{v} = v'_\xi\boldsymbol{e}'_\xi + v'_\eta\boldsymbol{e}'_\eta \tag{14}$$

上式を満たすベクトルの組 $\boldsymbol{e}'_\xi$，$\boldsymbol{e}'_\eta$ を，座標系 (ξ,η) の反変基底という．一方，もともとの基底 $\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\eta$ のほうは，共変基底と呼ぶ．ベクトル $\boldsymbol{v}$ をそれぞれの基底の線形結合で表したとき，反変基底に対応する係数が共変成分であり，共変基底に対応する係数が反変成分である．

2.2　新しい表記の導入

ここで，新しい表記を導入する．座標 (x,y) や (ξ,η) などを，それぞれ (x_1,x_2) や (ξ^1,ξ^2) などと表現することにする．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ のある座標系における反変成分を (v^1,v^2)，共変成分を (v_1,v_2) などと表す．反変成分の表記は累乗と紛らわしいが，累乗の場合はたとえば $(v^1)^2$ などとする．

反変基底を $\boldsymbol{e}^1$，$\boldsymbol{e}^2$，共変基底を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ と表す．共変基底は，空間の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(\xi^1,\xi^2)$ として，次式で定義される．

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi^i} \tag{15}$$

新しい表記によれば，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の共変成分は次のように書ける．

$$v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{16}$$

また，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を基底ベクトルの線形結合で表すと，次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 \\ &= v_1 \boldsymbol{e}^1 + v_2 \boldsymbol{e}^2 \end{aligned} \tag{17}$$

総和規約を用いると，もっと簡潔になる．

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i \tag{18}$$

添え字の上下の位置は，掛け合わされるもので「バランス」している．

3 ベクトルの内積

3.1 正規直交デカルト座標系における内積

まず，2 次元正規直交デカルト座標系の場合から話をはじめよう．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ があって，それぞれの成分を $(x_1,\ x_2)$ と $(y_1,\ y_2)$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の内積といえば，次式で計算されるものである．

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \tag{19}$$

これを，基底ベクトルまで含めてちゃんと計算してみよう．基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{y} &= y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{20}$$

これらの内積をとると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2) \cdot (y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1 y_1 \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_1 y_2 \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + x_2 x_1 \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 y_2 \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{21}$$

ここで，正規直交基底ベクトルどうしの内積は，次のようになる．

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{22}$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{23}$$

である．結局

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_i \tag{24}$$

3.2　曲線座標系における内積

さて，曲線座標系での内積を考えよう．曲線座標系の共変基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ とする．一般にこれらは互いに直交せず，その内積はクロネッカーのデルタにならない．次のようになるものとする．

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij} \tag{25}$$

内積が可換なので，当然 $g_{ij} = g_{ji}$ である．

ベクトル $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i$ を考える．その共変成分は次式のようになる．

$$\begin{aligned} v_i &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= v_j \boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{26}$$

つまり，曲線座標版のクロネッカーのデルタを δ^i_j と表すことにすると，次式が成り立たなければならない．

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta^i_j \tag{27}$$

これを用いると，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分は，反変基底ベクトルとの内積から得られることがわかる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^i &= v^j \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}^i \\ &= v^j \delta^i_j \\ &= v^i \end{aligned} \tag{28}$$

さて，成分行列が g_{ij} の成分行列の逆行列になるような g^{ij} を考える．すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \delta^i_j &= g^{ik} g_{kj} \\ \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j &= g^{ik} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j \end{aligned} \tag{29}$$

これより，次式を得る．

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{30}$$

また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j &= g^{ik} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j \\ &= g^{ik} \delta^j_k \\ &= g^{ij} \end{aligned} \tag{31}$$

よって

$$\begin{aligned} \delta^i_j &= g^{ik} g_{kj} \\ \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j &= (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^k) g_{kj} \\ \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}^i &= g_{jk} \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}^i \end{aligned} \tag{32}$$

これより

$$\boldsymbol{e}_i = g_{ij}\boldsymbol{e}^j \tag{33}$$

以上より，次の結果が得られた．

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{e}^i &=& g^{ij}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_i &=& g_{ij}\boldsymbol{e}^j \end{array}\right. \tag{34}$$

見てわかるように，g_{ij}，g^{ij} は基底ベクトルの添え字を上下にシフトさせる「シフター」としての役割がある．これは，任意のベクトルの成分に対しても成り立つ．

$$v_i\boldsymbol{e}^i = v_i g^{ij}\boldsymbol{e}_j = v^j\boldsymbol{e}_j \tag{35}$$

したがって

$$v^i = g^{ij}v_j \tag{36}$$

同様に

$$v^i\boldsymbol{e}_i = v^i g_{ij}\boldsymbol{e}^j = v_j\boldsymbol{e}^j \tag{37}$$

したがって

$$v_i = g_{ij}v^j \tag{38}$$

以上より

$$\left\{\begin{array}{lcl} v^i &=& g^{ij}v_j \\ v_i &=& g_{ij}v^j \end{array}\right. \tag{39}$$

結局，曲線座標におけるベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= (x^i\boldsymbol{e}_i)\cdot(y^j\boldsymbol{e}_j) \\ &= x^i y^j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \\ &= g_{ij}x^i y^j \end{aligned} \tag{40}$$

または

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= (x_i\boldsymbol{e}^i)\cdot(y_j\boldsymbol{e}^j) \\ &= x_i y_j \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j \\ &= g^{ij}x_i y_j \end{aligned} \tag{41}$$

さらに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= (x^i\boldsymbol{e}_i)\cdot(y_j\boldsymbol{e}^j) \\ &= x^i y_j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j \\ &= x^i y_j \delta_i^j \\ &= x^i y_i \end{aligned} \tag{42}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_i \boldsymbol{e}^i) \cdot (y^j \boldsymbol{e}_j) \\
&= x_i y^j \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j \\
&= x_i y^j \delta^i_j \\
&= x_i y^i
\end{aligned}
\tag{43}
$$

ここでも，添え字はバランスしている．

4　テンソル

4.1　テンソルの成分

ベクトル同様，曲線座標系におけるテンソルにも反変成分や共変成分がある．共変基底と関係するのが反変成分，反変基底と関係するのが共変成分である．テンソルの場合，共変基底と反変基底の両方ともに関係する場合がある．そのときの成分を混合成分と呼ぶ．

2 階のテンソル T を考えよう．これは次のように表される．

$$
\begin{aligned}
T &= T^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= T_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \\
&= T^i{}_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \\
&= T_i{}^j \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
\tag{44}
$$

それぞれ，T^{ij} が反変成分，T_{ij} が共変成分，$T^i{}_j$，$T_i{}^j$ が混合成分である．

さて，テンソルの成分に対しても g_{ij}，g^{ij} が添え字シフターとして働くことを示そう．

まず

$$
T^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T^{ij} g_{ik} g_{jl} \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l = T_{kl} \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l \tag{45}
$$

したがって

$$
T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl} \tag{46}
$$

また

$$
T_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = T_{ij} g^{ik} g^{jl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l = T^{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \tag{47}
$$

したがって

$$
T^{ij} = g^{ik} g^{jl} T_{kl} \tag{48}
$$

混合成分への変換は，たとえば

$$
T^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T^{ij} g_{ik} \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_j = T_k{}^j \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{49}
$$

より

$$
T_i{}^j = g_{ik} T^{kj} \tag{50}
$$

などとなる．

今度は，テンソルとベクトルの内積を考えよう．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ とテンソル T に関して $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ であるとすると

$$\begin{aligned} y^i \boldsymbol{e}_i &= T^{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (x_k \boldsymbol{e}^k) \\ &= T^{ij} x_k (\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_i \\ &= T^{ij} x_k \delta^k_j \boldsymbol{e}_i \\ &= T^{ij} x_j \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{51}$$

したがって

$$y^i = T^{ij} x_j \tag{52}$$

また

$$\begin{aligned} y_i \boldsymbol{e}^i &= T_{ij}(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) \cdot (x^k \boldsymbol{e}_k) \\ &= T_{ij} x^k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j) \boldsymbol{e}^i \\ &= T_{ij} x^k \delta^j_k \boldsymbol{e}^i \\ &= T_{ij} x^j \boldsymbol{e}^i \end{aligned} \tag{53}$$

したがって

$$y_i = T_{ij} x^j \tag{54}$$

混合成分については

$$\begin{aligned} y_i \boldsymbol{e}^i &= T_i{}^j(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (x_k \boldsymbol{e}^k) \\ &= T_i{}^j x_k (\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}^i \\ &= T_i{}^j x_k \delta^k_j \boldsymbol{e}^i \\ &= T_i{}^j x_j \boldsymbol{e}^i \end{aligned} \tag{55}$$

したがって

$$y_i = T_i{}^j x_j \tag{56}$$

また

$$\begin{aligned} y^i \boldsymbol{e}_i &= T^i{}_j(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j) \cdot (x^k \boldsymbol{e}_k) \\ &= T^i{}_j x^k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j) \boldsymbol{e}_i \\ &= T^i{}_j x^k \delta^j_k \boldsymbol{e}_i \\ &= T^i{}_j x^j \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{57}$$

したがって

$$y^i = T^i{}_j x^j \tag{58}$$

一般のテンソル T の成分も g_{ij}，g^{ij} と同様に添え字を上げ下げすることがわかる．

4.2 計量テンソル

添え字シフター g^{ij} を反変成分としてもつテンソル G を考える．これは

$$
\begin{aligned}
G &= g^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= g^{ij}g_{ik}g_{jl}\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l \\
&= \delta^j_k g_{jl}\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l \\
&= g_{kl}\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l
\end{aligned} \tag{59}
$$

したがって，g_{ij} はテンソル G の共変成分である．

また

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j &= g^{ij}g_{ik}\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \delta^j_k \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j &= g^{ij}g_{jk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k \\
&= \delta^i_k \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k
\end{aligned} \tag{61}
$$

したがって，テンソル G の混合成分はクロネッカーのデルタ δ^i_j である．

テンソル G は，ベクトルに作用してもベクトルを変えない．実際

$$
\begin{aligned}
G \cdot \boldsymbol{x} &= (g^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (x_k \boldsymbol{e}^k) \\
&= g^{ij}x_k(\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i \\
&= g^{ij}x_j\boldsymbol{e}_i \\
&= x^i\boldsymbol{e}_i \\
&= \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
G \cdot \boldsymbol{x} &= (g_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) \cdot (x^k \boldsymbol{e}_k) \\
&= g_{ij}x^k(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j)\boldsymbol{e}^i \\
&= g_{ij}x^j\boldsymbol{e}^i \\
&= x_i\boldsymbol{e}^i \\
&= \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{63}
$$

混合成分についても

$$
\begin{aligned}
G \cdot \boldsymbol{x} &= (\delta^i_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j) \cdot (x^k \boldsymbol{e}_k) \\
&= \delta^i_j x^k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j) \boldsymbol{e}_i \\
&= \delta^i_j x^j \boldsymbol{e}_i \\
&= x^i \boldsymbol{e}_i \\
&= \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{64}
$$

$$
\begin{aligned}
G \cdot \boldsymbol{x} &= (\delta^j_i \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (x_k \boldsymbol{e}^k) \\
&= \delta^j_i x_k (\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}^i \\
&= \delta^j_i x_j \boldsymbol{e}^i \\
&= x_i \boldsymbol{e}^i \\
&= \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{65}
$$

テンソル G の共変成分 g_{ij} の行列式 $|g_{ij}|$ を考えよう．デカルト座標の基底を $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ とすると

$$
\begin{aligned}
|g_{ij}| &= |\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j| \\
&= \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^j} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi^j} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \bar{\boldsymbol{e}}_k \right) \cdot \left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi^j} \bar{\boldsymbol{e}}_l \right) \right| \\
&= \left| \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_l}{\partial \xi^j} \delta_{kl} \right| \\
&= \left| \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \right|^2
\end{aligned} \tag{66}
$$

つまり $|g_{ij}|$ は，ヤコビ行列の行列式 (ヤコビアン) の 2 乗である．

5 座標変換

5.1 ベクトルの成分の座標変換

2 つの座標系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) と $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)$ を考えよう．一方の座標系の基底を $\boldsymbol{e}_i$，もう一方の基底を $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ とする．ベクトル $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = \bar{v}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i$ について，$\bar{\boldsymbol{e}}^i$ との内積をとってみる．

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^j &= v^i \boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^j \\
\bar{v}^i \delta^j_i &= v^i \boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^j \\
\bar{v}^j &= (\bar{\boldsymbol{e}}^j \cdot \boldsymbol{e}_i) v^i
\end{aligned} \tag{67}
$$

ここで ${a^i}_j = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{e}_j$ と書くと

$$\bar{v}^i = {a^i}_j v^j \tag{68}$$

は座標系間のベクトルの反変成分の変換を表す.

また，ベクトル $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}^i = \bar{v}_i \bar{\boldsymbol{e}}^i$ について，$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ との内積をとると

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j &= v_i \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j \\
\bar{v}_i \delta^i_j &= v_i \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j \\
\bar{v}_j &= (\bar{\boldsymbol{e}}_j \cdot \boldsymbol{e}^i) v_i
\end{aligned} \tag{69}$$

ここで ${b^i}_j = \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j$ と書くと

$$\bar{v}_i = {b^j}_i v_j \tag{70}$$

は座標系間のベクトルの共変成分の変換を表す.

基底ベクトルの変換は

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{e}}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \bar{\xi}^i} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial \bar{\xi}^i} \\
&= \frac{\partial \xi^j}{\partial \bar{\xi}^i} \boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \bar{\xi}^j} \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial \xi^i} \\
&= \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial \xi^i} \bar{\boldsymbol{e}}_j
\end{aligned} \tag{72}$$

座標変換 ${a^i}_j$，${b^i}_j$ は，それぞれ

$$\begin{aligned}
{a^i}_j &= \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{e}_j \\
&= \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \left(\frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial \xi^j} \bar{\boldsymbol{e}}_k \right) \\
&= \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^j}
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
{b^i}_j &= \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j \\
&= \boldsymbol{e}^i \cdot \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^j} \boldsymbol{e}_k \right) \\
&= \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar{\xi}^j}
\end{aligned} \tag{74}$$

したがって

$${a^i}_k {b^k}_j = \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^j} = \delta^i_j \tag{75}$$

$$b^i{}_k a^k{}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar{\xi}^k} \frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \tag{76}$$

5.2　テンソルの成分の座標変換

今度はテンソルの座標変換について考えよう．テンソル $T = T^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \bar{T}^{ij} \bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j$ とする．テンソル T と $\bar{\boldsymbol{e}}^i$ の内積をとると

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}_i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^k &= T^{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^k \\
\bar{T}^{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}^k \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j) \bar{\boldsymbol{e}}_i &= T^{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}^k \cdot \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_i \\
\bar{T}^{ij} \delta^k_j \bar{\boldsymbol{e}}_i &= T^{ij} a^k{}_j \boldsymbol{e}_i \\
\bar{T}^{ik} \bar{\boldsymbol{e}}_i &= T^{ij} a^k{}_j \boldsymbol{e}_i
\end{aligned} \tag{77}$$

さらに両辺で $\bar{\boldsymbol{e}}^i$ の内積をとると

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{ik} \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^l &= T^{ij} a^k{}_j \boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^l \\
\bar{T}^{ik} \delta^l_i &= T^{ij} a^k{}_j a^l{}_i \\
\bar{T}^{lk} &= a^l{}_i a^k{}_j T^{ij}
\end{aligned} \tag{78}$$

したがって，テンソルの反変成分の座標変換は次式で表される．

$$\bar{T}^{ij} = a^i{}_k a^j{}_l T^{kl} \tag{79}$$

テンソル $T = T_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = \bar{T}_{ij} \bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j$ とする．テンソル T と $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ の内積をとると

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}^i \otimes \bar{\boldsymbol{e}}^j) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_k &= T^{ij} (\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_k \\
\bar{T}_{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}_k \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^j) \bar{\boldsymbol{e}}^i &= T_{ij} (\bar{\boldsymbol{e}}_k \cdot \boldsymbol{e}^j) \boldsymbol{e}^i \\
\bar{T}_{ij} \delta^j_k \bar{\boldsymbol{e}}^i &= T_{ij} b^j{}_k \boldsymbol{e}^i \\
\bar{T}_{ik} \bar{\boldsymbol{e}}^i &= T_{ij} b^j{}_k \boldsymbol{e}^i
\end{aligned} \tag{80}$$

さらに両辺で $\bar{\boldsymbol{e}}^i$ との内積をとると

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{ik} \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_l &= T_{ij} b^j{}_k \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_l \\
\bar{T}_{ik} \delta^i_l &= T_{ij} b^j{}_k b^i{}_l \\
\bar{T}_{lk} &= b^i{}_l b^j{}_k T_{ij}
\end{aligned} \tag{81}$$

したがって，テンソルの共変成分の座標変換は次式で表される．

$$\bar{T}_{ij} = b^k{}_i b^l{}_j T_{kl} \tag{82}$$

同様にして，テンソルの混合成分の座標変換は次式のようになる．

$$\bar{T}^i{}_j = a^i{}_k b^l{}_j T^k{}_l \tag{83}$$

3 階および 4 階のテンソルの場合は，それぞれ次のようになる．

$$\bar{T}^{ijk} = a^i{}_m a^j{}_n a^k{}_p T^{mnp} \tag{84}$$

$$\bar{T}^{ijkl} = a^i{}_m a^j{}_n a^k{}_p a^l{}_q T^{mnpq} \tag{85}$$

6　ベクトルの外積

6.1　デカルト座標系における外積

デカルト座標において，基底を $\boldsymbol{e_i}$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \epsilon_{ijk} x_j y_k \boldsymbol{e}_i \tag{86}$$

ここで，ϵ_{ijk} はエディントンのイプシロン

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \quad 1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇置換}) \\ \quad 0 & (i, j, k \text{ のうちどれか } 2 \text{ つが等しい}) \end{cases} \tag{87}$$

である．基底ベクトルどうしの外積は次のように表される．

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{kij} \boldsymbol{e}_k \tag{88}$$

6.2　曲線座標系における外積

曲線座標における共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ どうしの外積を

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = E_{kij} \boldsymbol{e}^k \tag{89}$$

と表すことにする．両辺とも $\boldsymbol{e}_l$ との内積をとると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_l &= E_{kij} \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_l \\ (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_l &= E_{kij} \delta^k_l \\ \boldsymbol{e}_k \cdot (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) &= E_{kij} \end{aligned} \tag{90}$$

ここで，スカラー 3 重積を

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = |\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}| \tag{91}$$

と表すと

$$E_{ijk} = |\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_k| \tag{92}$$

これより，反変基底ベクトルは共変基底ベクトルによって次式で表される．

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k}{|\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_k|} \tag{93}$$

さて，デカルト座標 (x_1, x_2, x_3) と曲線座標 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) の間の座標変換 $b^i{}_j$ を

$$b^i{}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \tag{94}$$

とすると，デカルト座標の基底を $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ として，基底どうしは次式で結ばれる．

$$\boldsymbol{e}_i = b^j{}_i \bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{95}$$

これより

$$\begin{aligned} E_{ijk} &= |\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_k| \\ &= \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \\ &= (b^l{}_i \bar{\boldsymbol{e}}_l) \cdot \left\{ (b^m{}_j \bar{\boldsymbol{e}}_m) \times (b^n{}_k \bar{\boldsymbol{e}}_n) \right\} \\ &= b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \bar{\boldsymbol{e}}_l \cdot (\bar{\boldsymbol{e}}_m \times \bar{\boldsymbol{e}}_n) \\ &= b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \bar{\boldsymbol{e}}_l \cdot (\epsilon_{pmn} \bar{\boldsymbol{e}}_p) \\ &= b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{pmn} \delta_{lp} \\ &= b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{lmn} \end{aligned} \tag{96}$$

ここで，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ であることに注意して

$$\begin{aligned} b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{lmn} &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{lmn} \\ &= \frac{1}{6} \epsilon_{lmn} \epsilon_{ijk} b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{97}$$

座標変換 $b^i{}_j$ の行列式を b とすると

$$b = \frac{1}{6} \epsilon_{lmn} \epsilon_{ijk} b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \tag{98}$$

と表されるので

$$b^l{}_i b^m{}_j b^n{}_k \epsilon_{lmn} = b \epsilon_{ijk} \tag{99}$$

したがって

$$E_{ijk} = b \epsilon_{ijk} \tag{100}$$

座標変換 $b^i{}_j$ の定義から，その行列式 b はヤコビアンであり，計量テンソルの共変成分の行列式を g とすると，g はヤコビアンの 2 乗に等しかったから

$$E_{ijk} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \tag{101}$$

反変基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ どうしの外積を

$$\boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j = E^{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{102}$$

とすると

$$E^{ijk} = g^{il} g^{jm} g^{kn} E_{lmn} \tag{103}$$

と考えることができ，これより

$$
\begin{aligned}
E^{ijk} &= g^{il} g^{jm} g^{kn} E_{lmn} \\
&= \sqrt{g} g^{il} g^{jm} g^{kn} \epsilon_{lmn}
\end{aligned}
\tag{104}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
g^{il} g^{jm} g^{kn} \epsilon_{lmn} &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} g^{il} g^{jm} g^{kn} \epsilon_{lmn} \\
&= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} g^{il} g^{jm} g^{kn} \epsilon^{ijk} \\
&= \frac{1}{g} \epsilon^{ijk}
\end{aligned}
\tag{105}
$$

したがって

$$
E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \tag{106}
$$

ここで ϵ^{ijk} は，値としては ϵ_{ijk} と一致する．

以上より，曲線座標におけるベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の外積は

$$
\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} x_j y_k \boldsymbol{e}_i = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} x^j y^k \boldsymbol{e}^i \tag{107}
$$

7　微分

7.1　スカラー場の勾配

曲線座標でのスカラー場の勾配を考えよう．スカラー場を ϕ とすると，基底を $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ とするデカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) において，勾配 $\nabla\phi$ は

$$
\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \bar{\boldsymbol{e}}_i \tag{108}
$$

である．基底を $\boldsymbol{e}_i$ とする曲線座標系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) を考えると，勾配の共変成分は

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi \cdot \boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial \xi^j}
\end{aligned}
\tag{109}
$$

したがって，曲線座標におけるスカラー場の勾配は

$$
\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial \xi^i} \boldsymbol{e}^i = g^{ij} \frac{\partial\phi}{\partial \xi^j} \boldsymbol{e}_i \tag{110}
$$

7.2　ベクトル場の勾配

続いて，曲線座標におけるベクトル場の勾配を考えよう．ベクトル場の場合，座標変換によって成分が変わることに気をつけなければならない．

曲線座標系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) から $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)$ への変換を考えよう．それぞれの座標系の基底を $\boldsymbol{e}_i, \bar{\boldsymbol{e}}_i$ とすると

$$a^i{}_j = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^j} \tag{111}$$

$$b^i{}_j = \boldsymbol{e}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j = \boldsymbol{e}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \bar{\xi}^j} \tag{112}$$

空間の点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は曲線座標の関数であったので，これは変換が曲線座標の位置に依存していることを意味する．

したがって，たとえばベクトル場 $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = \bar{v}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i$ の成分を曲線座標上で単純に微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{\xi}^j} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^j}(b^k{}_i v_k) \\
&= \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k + b^k{}_i \frac{\partial v_k}{\partial \bar{\xi}^j} \\
&= \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k + b^k{}_i \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l}\frac{\partial \xi^l}{\partial \bar{\xi}^j} \\
&= b^k{}_i b^l{}_j \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k
\end{aligned} \tag{113}$$

ベクトル場の勾配がテンソルとして座標変換を受けるならば，座標変換の微分項は余分である．つまり，これはテンソルの成分ではない．

以降では，ベクトル場の勾配がテンソルになるような微分の手続きを求める．

7.3　ベクトルの平行移動

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の中を微小なベクトル $d\boldsymbol{x}$ だけ移動したとき，ベクトルが $d\boldsymbol{v}$ だけ変化するとすれば

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \nabla \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{114}$$

である．デカルト座標系においては

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \tag{115}$$

であるが，曲線座標系では，そう簡単にはいかない．

曲線座標の場合，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ では基底が異なるため，それぞれの場所におけるベクトルの成分の差を単純にとるわけにはいかない．そこで，次のように考える．$\boldsymbol{x}$ におけるベクトルを $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ に「平行移動」し，その後に $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ におけるベクトルと差をと

るようにする．位置 $\boldsymbol{x}$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ の曲線座標上の共変成分を $v_i(\boldsymbol{x})$ とし，その「平行移動」を δv_i で表すと

$$dv_i = v_i(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - (v_i(\boldsymbol{x}) + \delta v_i) \tag{116}$$

では，曲線座標におけるベクトルの「平行移動」は，どのようになるだろうか．ベクトルと基底との角度を一定にして移動させればよいか．つまり，成分を変えずに移動するということだが，移動に伴って基底が変わるわけだから，それではベクトルそのものが変化してしまう．ベクトルを変化させずに移動するとどうなるか．そうなると，移動に伴って成分が変化することになる．曲線座標におけるベクトルの「平行移動」とは，移動元の基底による座標系から移動先の基底による座標系へと，ベクトルの成分を座標変換することであると考えることができる．

つまり

$$v_i(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_i \left(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{x})\right) v_j(\boldsymbol{x}) \tag{117}$$

ここで，移動元を固定すれば，上式は移動先の位置の関数になる．したがって

$$v_i(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}^j\right) v_j \tag{118}$$

以上より，$v_i(\boldsymbol{x})$ の平行移動 δv_i は

$$\begin{aligned}\delta v_i &= v_i(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) - v_i(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x})}{\partial \xi^j} dx^j \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{e}^k\right) v_k dx^j\end{aligned} \tag{119}$$

7.4 クリストッフェル記号

上の平行移動の式は，基底を用いることで，デカルト座標の存在を前提していることになる．これを，デカルト座標の存在を前提しないような，曲線座標自身を特徴づける量，たとえば計量テンソルなどで表すことはできないか．

ということで，とりあえず計量テンソルの共変成分 g_{ij} を微分してみる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} &= \frac{\partial}{\partial \xi^k}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^k} \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k}\end{aligned} \tag{120}$$

上式の j, k，i, k を入れ替えたものをそれぞれ作ると

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \xi^j} \tag{121}$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^i} \tag{122}$$

また，次のことに気をつける．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \\
&= \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial \xi^j \partial \xi^i} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^i}
\end{aligned}
\tag{123}
$$

以上より

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i}\right) = \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k} \tag{124}
$$

これを Γ_{ijk} と表すことにすると，平行移動 δv_i は

$$
\delta v_i = \Gamma_{kij} v^k dx^j \tag{125}
$$

また，$g^{ij}\Gamma_{jkl}$ を Γ^i_{kl} と書くことにすると

$$
\delta v_i = \Gamma^l_{ij} v_l dx^j \tag{126}
$$

上で使用した記号 Γ_{ijk}

$$
\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i}\right) \tag{127}
$$

を第 1 種クリストッフェル記号という．一方，Γ^i_{jk}

$$
\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l}\right) \tag{128}
$$

を第 2 種クリストッフェル記号という．

もともと

$$
\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k} \tag{129}
$$

$$
\Gamma^i_{jk} = g^{il}\boldsymbol{e}_l \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k} = \boldsymbol{e}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k} \tag{130}
$$

であることを考えると

$$
\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}, \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \tag{131}
$$

計量テンソルの共変成分の微分をクリストッフェル記号で表してみよう．第一種クリストッフェル記号 Γ_{ijk}，Γ_{jik} を考えると，それぞれ

$$
\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i}\right) \tag{132}
$$

$$
\Gamma_{jik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j}\right) \tag{133}
$$

これより

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \tag{134}$$

第二種クリストッフェル記号で表すと

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} &= g_{il}\Gamma^l_{jk} + g_{jl}\Gamma^l_{ik} \\ &= (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l)\Gamma^l_{jk} + (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)\Gamma^l_{ik} \\ &= \boldsymbol{e}_i \cdot \left(\Gamma^l_{jk}\boldsymbol{e}_l\right) + \boldsymbol{e}_j \cdot \left(\Gamma^l_{ik}\boldsymbol{e}_l\right)\end{aligned} \tag{135}$$

一方

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} &= \frac{\partial}{\partial \xi^k}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^k} \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k}\end{aligned} \tag{136}$$

以上より

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k \tag{137}$$

クリストッフェル記号の座標変換を考えてみよう．二つの座標系 $(\xi^1, \xi^2, \xi^3), (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)$ があり，それぞれの基底を $\boldsymbol{e}_i$，$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ としよう．

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial \bar{\xi}^i}\boldsymbol{e}_j \tag{138}$$

である．これより

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}_i}{\partial \bar{\xi}^j} = \bar{\Gamma}^k_{ij}\bar{\boldsymbol{e}}_k = \bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial \xi^l}{\partial \bar{\xi}^k}\boldsymbol{e}_l \tag{139}$$

また

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}_i}{\partial \bar{\xi}^j} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^j}\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\boldsymbol{e}_k\right) \\ &= \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^j \partial \bar{\xi}^i}\boldsymbol{e}_k + \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \bar{\xi}^j} \\ &= \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^j \partial \bar{\xi}^i}\boldsymbol{e}_k + \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\frac{\partial \xi^l}{\partial \bar{\xi}^j}\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial \xi^l} \\ &= \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^j \partial \bar{\xi}^i}\boldsymbol{e}_k + \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\frac{\partial \xi^l}{\partial \bar{\xi}^j}\Gamma^m_{kl}\boldsymbol{e}_m \\ &= \left(\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial \bar{\xi}^i \partial \bar{\xi}^j} + \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\frac{\partial \xi^m}{\partial \bar{\xi}^j}\Gamma^l_{km}\right)\boldsymbol{e}_l\end{aligned} \tag{140}$$

よって

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial \xi^m}{\partial \bar{\xi}^j}\frac{\partial \xi^n}{\partial \bar{\xi}^k}\Gamma^l_{mn} + \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial \bar{\xi}^j \partial \bar{\xi}^k} \tag{141}$$

ここで

$$a^i{}_j = \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^j}, \quad b^i{}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar{\xi}^j} \tag{142}$$

とすると

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = a^i{}_l b^m{}_j b^n{}_k \Gamma^l_{mn} + a^i{}_l \frac{\partial b^l{}_j}{\partial \bar{\xi}^k} \tag{143}$$

クリストッフェル記号の変換は，3 階のテンソルの変換とは異なっているため，クリストッフェル記号はテンソルの成分にならないことがわかる．

7.5　ベクトル場の共変微分

さて，これで曲線座標におけるベクトルの平行移動が得られたので，さっそく曲線座標におけるベクトル場の勾配を求めよう．

$$\begin{aligned} dv_i &= v_i(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - (v_i(\boldsymbol{x}) + \delta v_i) \\ &= v_i(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - v_i(\boldsymbol{x}) - \delta v_i \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial \xi^j} dx^j - \Gamma^l_{ij} v_l dx^j \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi^j} - \Gamma^l_{ij} v_l \right) dx^j \end{aligned} \tag{144}$$

したがって，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の共変成分に関する勾配は

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi^j} - \Gamma^k_{ij} v_k \tag{145}$$

と表される．

問題は，これがテンソルとして座標変換されるかどうかである．

二つの座標系 (ξ^1, ξ^2, ξ^3)，$(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)$ を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{\xi}^j} - \bar{\Gamma}^k_{ij} \bar{v}_k &= b^k{}_i b^l{}_j \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k - \left(a^k{}_l b^m{}_i b^n{}_j \Gamma^l_{mn} + a^k{}_l \frac{\partial b^l{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} \right) b^p{}_k v_p \\ &= b^k{}_i b^l{}_j \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k - \left(\delta^p_l b^m{}_i b^n{}_j \Gamma^l_{mn} + \delta^p_l \frac{\partial b^l{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} \right) v_p \\ &= b^k{}_i b^l{}_j \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k - b^m{}_i b^n{}_j \Gamma^p_{mn} v_p - \frac{\partial b^k{}_i}{\partial \bar{\xi}^j} v_k \\ &= b^k{}_i b^l{}_j \frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} - b^k{}_i b^l{}_j \Gamma^m_{kl} v_m \\ &= b^k{}_i b^l{}_j \left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi^l} - \Gamma^m_{kl} v_m \right) \end{aligned} \tag{146}$$

したがって，これはテンソルの成分である．

今度は反変成分に関する勾配について考えよう．デカルト座標系において，基底を $\boldsymbol{e}_i$ として，ベクトル $\boldsymbol{u}$ に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向微分を考えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i)\cdot\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\right)\\ &= u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_j\\ &= u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j\end{aligned}\tag{147}$$

これより，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向微分は

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}\tag{148}$$

上の式で基底ベクトルにかかっている部分を勾配の成分であると考えれば，曲線座標の基底ベクトルに関する方向微分によって，曲線座標における勾配の成分を得ることができる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^j} &= \frac{\partial}{\partial\xi^j}(v^i\boldsymbol{e}_i)\\ &= \frac{\partial v^i}{\partial\xi^j}\boldsymbol{e}_i + v^i\frac{\partial\boldsymbol{e}_i}{\partial\xi^j}\\ &= \frac{\partial v^i}{\partial\xi^j}\boldsymbol{e}_i + v^i\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k\\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial\xi^j} + \Gamma^i_{jk}v^k\right)\boldsymbol{e}_i\end{aligned}\tag{149}$$

したがって

$$\frac{\partial v^i}{\partial\xi^j} + \Gamma^i_{jk}v^k\tag{150}$$

がベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の反変成分に関する勾配である．

座標変換を確認しよう．ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の反変成分を単純に微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{v}^i}{\partial\bar{\xi}^j} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}^j}\left(a^i{}_k v^k\right)\\ &= \frac{\partial a^i{}_k}{\partial\bar{\xi}^j}v^k + a^i{}_k\frac{\partial v^k}{\partial\bar{\xi}^j}\\ &= \frac{\partial a^i{}_k}{\partial\bar{\xi}^j}v^k + a^i{}_k\frac{\partial v^k}{\partial\xi^l}\frac{\partial\xi^l}{\partial\bar{\xi}^j}\\ &= a^i{}_k b^l{}_j\frac{\partial v^k}{\partial\xi^l} + \frac{\partial a^i{}_k}{\partial\bar{\xi}^j}v^k\end{aligned}\tag{151}$$

これより

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{\xi}^j} + \bar{\Gamma}^i_{jk}\bar{v}^k &= a^i{}_k b^l{}_j \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial a^i{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} v^k + \left(a^i{}_l b^m{}_j b^n{}_k \Gamma^l_{mn} + a^i{}_l \frac{\partial b^l{}_j}{\partial \bar{\xi}^k} \right) a^k{}_p v^p \\
&= a^i{}_k b^l{}_j \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial a^i{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} v^k + \left(a^i{}_l b^m{}_j \delta^n_p \Gamma^l_{mn} + a^i{}_l \frac{\partial b^l{}_j}{\partial \bar{\xi}^k} a^k{}_p \right) v^p
\end{aligned} \tag{152}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b^l{}_j}{\partial \bar{\xi}^k} a^k{}_p &= \frac{\partial b^l{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} a^k{}_p \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_j} \left(b^l{}_k a^k{}_p \right) - b^l{}_k \frac{\partial a^k{}_p}{\partial \bar{\xi}^j} \\
&= \frac{\partial \delta^l_p}{\partial \bar{\xi}^j} - b^l{}_k \frac{\partial a^k{}_p}{\partial \bar{\xi}^j} \\
&= -b^l{}_k \frac{\partial a^k{}_p}{\partial \bar{\xi}^j}
\end{aligned} \tag{153}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{\xi}^j} + \bar{\Gamma}^i_{jk}\bar{v}^k &= a^i{}_k b^l{}_j \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial a^i{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} v^k + \left(a^i{}_l b^m{}_j \delta^n_p \Gamma^l_{mn} - \delta^i_k \frac{\partial a^k{}_p}{\partial \bar{\xi}^j} \right) v^p \\
&= a^i{}_k b^l{}_j \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \frac{\partial a^i{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} v^k + a^i{}_l b^m{}_j \Gamma^l_{mp} v^p - \frac{\partial a^i{}_k}{\partial \bar{\xi}^j} v^k \\
&= a^i{}_k b^l{}_j \frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + a^i{}_k b^l{}_j \Gamma^k_{lm} v^m \\
&= a^i{}_k b^l{}_j \left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^l} + \Gamma^k_{lm} v^m \right)
\end{aligned} \tag{154}
$$

これは，ベクトル場の反変成分に関する勾配がテンソルの混合成分であることを示している．

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の勾配の曲線座標における成分を $\boldsymbol{v}$ の共変微分といい，$\boldsymbol{v}$ の反変成分および共変成分に関する共変微分は，それぞれ次のようになる．

$$
\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} + \Gamma^i_{jk} v^k, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \xi^j} - \Gamma^k_{ij} v_k \tag{155}
$$

また，方向微分を用いると，それぞれ次のようにも書ける．

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{e}^i, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{156}
$$

基底ベクトルに関する基底ベクトルの方向微分を考える．共変基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の反

変成分が $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j$ により得られることに注意すると，共変微分により

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^m) + \Gamma^m_{jk}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k) \right) \boldsymbol{e}^m \\
&= \Gamma^m_{jk}\delta^k_i \boldsymbol{e}^m \\
&= \Gamma^m_{ij}\boldsymbol{e}^m
\end{aligned}
\tag{157}
$$

したがって

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}^k \tag{158}
$$

これは以前得たものと一致する．同様に

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial \xi^j} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_m) - \Gamma^k_{mj}(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_k) \right) \boldsymbol{e}^m \\
&= -\Gamma^k_{mj}\delta^i_k \boldsymbol{e}^m \\
&= -\Gamma^i_{mj}\boldsymbol{e}^m
\end{aligned}
\tag{159}
$$

したがって

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial \xi^j} = -\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{e}^k \tag{160}
$$

7.6 テンソルの共変微分

テンソル T の基底ベクトルに関する方向微分を考えると，T の反変成分に関して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \xi^k} &= \frac{\partial}{\partial \xi^k}(T^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \\
&= \frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi^k}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + T^{ij}\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial \xi^k} \otimes \boldsymbol{e}_j + T^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial \xi^k} \\
&= \frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi^k}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + T^{ij}\Gamma^l_{ik}\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_j + T^{ij}\Gamma^l_{jk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l \\
&= \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi^k} + T^{lj}\Gamma^i_{kl} + T^{il}\Gamma^j_{kl} \right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
\tag{161}
$$

したがって，T の反変成分 T^{ij} に関する共変微分は

$$
\frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi^k} + \Gamma^i_{kl}T^{lj} + \Gamma^j_{kl}T^{il} \tag{162}
$$

同様にして，T の共変成分 T_{ij} および混合成分 $T^i{}_j$ に関する共変微分はそれぞれ次のように得られる．

$$
\frac{\partial T_{ij}}{\partial \xi^k} - \Gamma^l_{ki}T_{lj} - \Gamma^l_{kj}T_{il} \tag{163}
$$

$$
\frac{\partial T^i{}_j}{\partial \xi^k} + \Gamma^i_{kl}T^l{}_j - \Gamma^l_{kj}T^i{}_l \tag{164}
$$

特に，計量テンソル G の各成分 g^{ij}，g_{ij}，δ^i_j に関する共変微分は，まず，g^{ij} の微分を考えると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi^k} &= \frac{\partial}{\partial \xi^k}(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial \xi^k} \cdot \boldsymbol{e}^j + \frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial \xi^k} \cdot \boldsymbol{e}^i \\
&= -\Gamma^i_{kl}\boldsymbol{e}^l \cdot \boldsymbol{e}^j - \Gamma^j_{kl}\boldsymbol{e}^l \cdot \boldsymbol{e}^i \\
&= -\Gamma^i_{kl} g^{jl} - \Gamma^j_{kl} g^{il}
\end{aligned} \tag{165}
$$

したがって，g^{ij} の共変微分は

$$
\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi^k} + \Gamma^i_{kl} g^{jl} + \Gamma^j_{kl} g^{il} = 0 \tag{166}
$$

また

$$
\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = g_{il}\Gamma^l_{jk} + g_{jl}\Gamma^l_{ik} \tag{167}
$$

であったので，g_{ij} の共変微分は

$$
\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} - \Gamma^l_{ki} g_{jl} - \Gamma^l_{kj} g_{il} = 0 \tag{168}
$$

δ^i_j に関しては

$$
\frac{\partial \delta^i_j}{\partial \xi^k} + \Gamma^i_{kl}\delta^l_j - \Gamma^l_{kj}\delta^i_l = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{kj} = 0 \tag{169}
$$

以上より，計量テンソルの共変微分は，どの成分も 0 になる．

7.7　ベクトル場の発散

ベクトル場の発散は，勾配のトレースとして定義できる．デカルト座標において，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散は

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{170}
$$

共変微分のトレースを考えるために，クリストッフェル記号の縮約を考える．

$$
\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = g_{il}\Gamma^l_{jk} + g_{jl}\Gamma^l_{ik} \tag{171}
$$

から

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} &= g^{ij} g_{il}\Gamma^l_{jk} + g^{ij} g_{jl}\Gamma^l_{ik} \\
&= \delta^j_l \Gamma^l_{jk} + \delta^i_l \Gamma^l_{ik} \\
&= 2\Gamma^l_{lk}
\end{aligned} \tag{172}
$$

これより

$$\Gamma^l_{lk} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} \tag{173}$$

ところで，計量テンソル G の共変成分の行列式 $|g_{ij}|$ を g とすると

$$g = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} g_{il} g_{jm} g_{kn} \tag{174}$$

g の微分を考えると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \xi^p} &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^p} g_{jm} g_{kn} + g_{jm} \frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^p} g_{kn} + g_{il} g_{jm} \frac{\partial g_{kn}}{\partial \xi^p} \right) \\
&= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \left(g_{il} g^{il} \frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^p} g_{jm} g_{kn} + g_{il} g_{jm} g^{jm} \frac{\partial g_{jm}}{\partial \xi^p} g_{kn} + g_{il} g_{jm} g_{kn} g^{kn} \frac{\partial g_{kn}}{\partial \xi^p} \right) \\
&= \frac{2}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} g_{il} g_{jm} g_{kn} \Gamma^q_{qp} \\
&= 2g \Gamma^q_{qp}
\end{aligned} \tag{175}$$

以上より

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \tag{176}$$

これは，次のように書ける．

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \\
&= \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial \xi^j} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^j}
\end{aligned} \tag{177}$$

さて，準備が整ったので，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の共変微分のトレースをとると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^i}{\partial \xi^i} + \Gamma^i_{ij} v^j &= \frac{\partial v^i}{\partial \xi^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^j} v^j \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial v^i}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^i} v^i \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} v^i)
\end{aligned} \tag{178}$$

よって，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} v^i) \tag{179}$$

で与えられる．

7.8　スカラー場のラプラシアン

スカラー場 ϕ のラプラシアン $\nabla^2\phi$ は，勾配と発散を用いて，次のように求まる．

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \nabla\cdot(\nabla\phi)\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial\xi^j}\right)\end{aligned} \tag{180}$$

7.9　回転

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ は，曲線座標における外積の議論から，次のように表される．

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial\xi^j}\boldsymbol{e}_i \tag{181}$$

参考文献

[1] 石原繁：テンソル -科学技術のために-，裳華房 (1991).

[2] P. A. M. ディラック：一般相対性理論，ちくま学芸文庫 (2005).

[3] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善 (1992).