

連続体とはなにか

春日 悠

2009年7月15日

目次

1	はじめに	1
2	連続体近似	1
3	連続体と配置	1
4	運動	2

1 はじめに

物体の運動を数学的に記述しようとする場合、まずは質点が使われる。回転を考慮する場合は、とりあえず変形は無視して、剛体が使われる。いよいよ変形まで考えることになったら、連続体の登場となる。

2 連続体近似

われわれが日常生活を送る中で触れるような大きさの物体は、連続体という数学モデルで考えることができる。連続体とは連続的なものであるが、もちろん、現代物理学の知識によれば、目の前の物体は非常にたくさんの原子の集まりで構成されており、厳密には連続的なものとはいいがたい。隙間が見えないくらいにたくさんの原子が集まっていて、もういっそ連続的なものだと考えても差し支えないくらいのスケールで考える場合において、物体を連続体で近似できる。

3 連続体と配置

3次元実数空間 R^3 の部分集合 B の各要素と一対一に対応する要素の集合 \mathcal{X} を連続体と名づける。連続体の要素を物質点とか物質粒子とよび x で表わす。 B を連続体

の配置という。定義より、 $B \rightarrow B$ の写像 θ が定義できる。

$$\boldsymbol{x} = \theta(\mathcal{X}) \quad (1)$$

ここで $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ は物質点 \mathcal{X} の位置を表わす。

実数空間 R^3 は幾何学的な空間を表わし、配置 B は連続体 B が占める領域を表わす。物質点が実数空間の部分集合 B の各要素と一対一に対応するということは、物質点が非可算無限個存在することを意味する。2つの物質点の間には少なくとも1つは物質点が存在する。一方、原子と原子の間に必ず原子が存在するとは限らない。その辺は現代物理学の知識と合わないが、物質点の中には多数の原子が存在し、物質点での性質はその平均的性質を表わすと仮定して、その近似が成り立つような物体を「連続体」とよぶのである。

4 運動

連続体の配置は時間とともに変化する。時間を実数変数 t で表わし、時刻 $t = 0$ のときの B の配置 B_0 を基準配置とか初期配置とよぶ。配置 B_0 の要素を X とし、 B_0 を基準として時刻 t での B の配置 B_t の要素 x を次のように表わす。

$$\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}, t) \quad (2)$$

あるいは、余計な記号の使用を避けるため、次のように表わすこともある。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \quad (3)$$

配置 B_t を B の現在配置という。

物質点とその位置の対応については、物質点 \mathcal{X} とその現在位置 x の対応を考えることができるが、対応が時間とともに変化してしまうので、初期位置 X との対応を考えたほうが都合がよい。で、どうせ一対一対応なのだから、普通は X を \mathcal{X} の代りに使う。つまり X は、物質点 \mathcal{X} を表わすラベルであり、同時にその初期位置でもある。また、各時刻における配置は ϕ によって得られるので、はじめに定義した物質点 \mathcal{X} とその配置に関する写像については、すっかり忘れてしまってもよい。

写像 ϕ を連続体 B の運動という。ここから連続体力学ははじまる。

参考文献

- [1] P. Chadwick, Continuum Mechanics Concise Theory and Problems, Dover, 1999
- [2] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992