連続の式

春日 悠

2009年4月15日

目次

1 物質表示の連続の式

物体 B があるとする．ある時点を時間 $t=0$ とし，そのとき B を構成する点の位置ベクトルを $\boldsymbol{X}$ としよう．その後 B が変形したとして，そのときの B の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．B の変形前後の微小ベクトル $d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{x}$ は次式で関係付けられる．

$$d\boldsymbol{x} = F \cdot d\boldsymbol{X} \tag{1}$$

ここで F は変形勾配テンソルであり，その成分は

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{2}$$

である．

さて，変形前の B の占める領域を Ω_0，変形後のそれを Ω としよう．変形前の B の微小体積を dV とし，変形後のそれを dv とする．また，B の点 $\boldsymbol{X}$ の時間 t における密度を $\rho(\boldsymbol{X}, t)$ として，変形前の B の密度を $\rho_0 = \rho(\boldsymbol{X}, 0)$，変形後のそれを $\rho = \rho(\boldsymbol{X}, t)$ とすると，B の質量 m は次式で表される．

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV = \int_{\Omega} \rho dv \tag{3}$$

変数変換により

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 dV = \int_{\Omega_0} \rho J dV \tag{4}$$

ここで，J はヤコビアンである．上式より次式が得られる．

$$\rho_0 = \rho J \tag{5}$$

この式を連続の式といい，質量保存の法則を表している．

変形後の B の内部の微小ベクトルを $d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{z}$ とし，それらが作る六面体の体積が dv であるとしよう．一方，変形前の B の内部の微小ベクトル $d\boldsymbol{X}, d\boldsymbol{Y}, d\boldsymbol{Z}$ が作る六面体の体積を dV とする．3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る六面体の体積は，スカラー 3 重積

$$|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}| = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{6}$$

で表される．ここで ϵ_{ijk} はエディントンのイプシロン

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (i, j, k \text{ のうちどれか 2 つが等しい}) \end{cases} \tag{7}$$

である．総和規約を用いている．スカラー 3 重積を用いて

$$\begin{aligned} dv &= |d\boldsymbol{x} \quad d\boldsymbol{y} \quad d\boldsymbol{z}| \\ &= |F \cdot d\boldsymbol{X} \quad F \cdot d\boldsymbol{Y} \quad F \cdot d\boldsymbol{Z}| \\ &= \epsilon_{ijk} F_{il} dX_l F_{jm} dX_m F_{kn} dX_n \\ &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn} \epsilon_{lmn} dX_l dY_m dZ_n \\ &= \det F |d\boldsymbol{X} \quad d\boldsymbol{Y} \quad d\boldsymbol{Z}| \\ &= dV \det F \end{aligned} \tag{8}$$

これより $J = \det F$ が得られる．ここで $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ および

$$\det F = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn} \tag{9}$$

を用いた．

2　空間表示の連続の式

物体の存在する空間の密度場を考える．空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とし，時間 t における密度場を $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ で表すことにしよう．空間のある点に微小立方体を考える．デカルト座標系が設定されているとして，立方体の面は座標軸に平行であるとし，軸方向の幅をそれぞれ dx, dy, dz とする．今，x 軸に垂直な面 2 枚に注目し，軸の負側の面を通る単位時間当たりの質量を $\dot{m}_x^-$，正側の面のそれを $\dot{m}_x^+$ と表す．x 軸方向の物体の速度を u_x とし，流束 ρu_x を ϕ_x と表すと，$\dot{m}_x^-$, $\dot{m}_x^+$ はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{m}_x^- &= \phi_x dydz \\ \dot{m}_x^+ &= \left(\phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx \right) dydz \end{aligned} \tag{10}$$

微小立方体から単位時間当たりに流出する x 軸方向の質量 $\dot{m}_x$ は次式になる．

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_x &= \dot{m}_x^+ - \dot{m}_y^- \\
&= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dxdydz \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dxdydz
\end{aligned} \tag{11}
$$

y 軸方向，z 軸方向も同様に考えると，微小立方体の質量の時間変化率 $\dot{m}$ は，次式で表される．

$$
\dot{m} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dxdydz \tag{12}
$$

上式から

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{13}
$$

これは，空間表示による連続の式である．上式を変形すると，次式が得られる．

$$
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{14}
$$

ここで，左辺第一項は ρ の物質時間導関数

$$
\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho \tag{15}
$$

である．

非圧縮性をもつ物体の場合は，密度が変化しない $(D\rho/Dt = 0)$ ので，連続の式は次式になる．

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{16}
$$

3 物質表示から空間表示へ

式 (5) と式 (13) は，どちらも同じ質量保存の法則を表しているので，一方からもう一方を導くことができるはずである．ここでは，式 (5) から 式 (13) を導いてみよう．

式 (5) はそもそも，物体 B の質量を m として

$$
m = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV = \int_{\Omega_0} \rho J dV \tag{17}
$$

であったが，m の時間変化率 $\dot{m}$ を考えると

$$
\dot{m} = \int_{\Omega_0} (\dot{\rho} J + \rho \dot{J}) dV \tag{18}
$$

ここで $\dot{J}$ について考えよう．速度勾配テンソルを L とし，その成分を

$$
L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{19}
$$

とすると，$\dot{F}_{ij}$ は

$$
\begin{aligned}
\dot{F}_{ij} &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \\
&= L_{ik}F_{kj}
\end{aligned} \tag{20}
$$

である．$J = \det F$ より

$$
\begin{aligned}
\dot{J} &= \frac{\partial}{\partial t}(\det F) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{ijk}F_{i1}F_{j2}F_{k3}) \\
&= \epsilon_{ijk}(\dot{F}_{i1}F_{j2}F_{k3} + F_{i1}\dot{F}_{j2}F_{k3} + F_{i1}F_{j2}\dot{F}_{k3}) \\
&= \epsilon_{ijk}(L_{il}F_{l1}F_{j2}F_{k3} + F_{i1}L_{jm}F_{m2}F_{k3} + F_{i1}F_{j2}L_{kn}F_{n3}) \\
&= \epsilon_{ijk}L_{il}F_{l1}F_{j2}F_{k3} + \epsilon_{ijk}L_{jm}F_{m2}F_{i1}F_{k3} + \epsilon_{ijk}L_{kn}F_{n3}F_{i1}F_{j2} \\
&= \epsilon_{ljk}L_{li}F_{i1}F_{j2}F_{k3} + \epsilon_{imk}L_{mj}F_{j2}F_{i1}F_{k3} + \epsilon_{ijn}L_{nk}F_{k3}F_{i1}F_{j2} \\
&= (\epsilon_{ljk}L_{li} + \epsilon_{imk}L_{mj} + \epsilon_{ijn}L_{nk})F_{i1}F_{j2}F_{k3} \\
&= \frac{1}{6}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}L_{li} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{imk}L_{mj} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn}L_{nk})\epsilon_{ijk}F_{i1}F_{j2}F_{k3} \\
&= \frac{1}{6}(2\delta_{il}L_{li} + 2\delta_{jm}L_{mj} + 2\delta_{kn}L_{nk})\epsilon_{ijk}F_{i1}F_{j2}F_{k3} \\
&= L_{ll}\epsilon_{ijk}F_{i1}F_{j2}F_{k3} \\
&= \mathrm{tr}L \det F \\
&= J\mathrm{tr}L
\end{aligned} \tag{21}
$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{22}
$$

であり，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ であることを利用した．また，$\mathrm{tr}L = L_{ii}$ は速度勾配テンソル L のトレースである．

したがって $\dot{m}$ は

$$
\dot{m} = \int_{\Omega_0} (\dot{\rho} + \rho\,\mathrm{tr}L) J dV \tag{23}
$$

質量保存より $\dot{m} = 0$，また

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}L &= L_{ii} \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{24}
$$

なので

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{25}$$

これより

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{26}$$

この場合の ρ は物質表示であるが，これを空間表示とみなせば，式 (13) が得られる．

参考文献

[1] 石原繁：テンソル -科学技術のために-，裳華房 (1991).

[2] 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善 (1992).

[3] Y.C. ファン：連続体の力学入門 改訂版，培風館 (1980).