大気境界層

春日 悠

2013 年 11 月 28 日

目 次

1 大気境界層の速度分布 1

2 乱流エネルギーとエネルギー散逸率 3

1 大気境界層の速度分布

我々が普段暮らしている 1 km 以下の高度の大気は，地球規模で見ると境界層になっている．これを大気境界層 (Atmospheric Boundary Layer，ABL) という．

境界層の理論から，大気境界層の速度分布を求めてみる．大気の平均速度を $\bar{u}$ とし，高度を z で表す．地表のせん断応力 τ_w をレイノルズ応力で表すとして，プラントルの混合長の仮説を用いると

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \ell_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \tag{1}$$

ここで ℓ_m は混合長 (mixing length) である．摩擦速度 (friction velocity) を $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ で定義すると

$$u^* = \ell_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{2}$$

渦粒子は，壁近傍では壁による制約を受け，壁から離れるにつれ自由になると考えられる．したがって，混合長は壁からの距離 z に比例すると仮定できる．

$$\ell_m = \kappa z \tag{3}$$

ここで κ はカルマン定数と呼ばれ，0.41 程度の値とされる．

これを用いて，摩擦速度は

$$\frac{u^*}{z} = \kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{4}$$

$z = z_0$ で $u = 0$ として，両辺を z で z_0 から z まで積分すると

$$u^* \ln \frac{z}{z_0} = \kappa \bar{u} \tag{5}$$

したがって

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \tag{6}$$

z_0 は地表面の粗さ (roughness) を表す高さであり，値は障害物の平均高さの 1/10 程度とされる．

$z = 0$ で $\bar{u} = 0$ としたい場合は，次式のようにする．

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z + z_0}{z_0} \tag{7}$$

$\bar{u} = 0$ となる高さ z_g を指定したい場合は，次のように表現できる．

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z - z_g + z_0}{z_0} \tag{8}$$

上式を摩擦速度について解くと

$$u^* = \frac{\kappa \bar{u}}{\ln \frac{z - z_g + z_0}{z_0}} \tag{9}$$

高さ z_{ref} (z_g からの相対高さ) における速度 u_{ref} を用いて，摩擦速度は次のように表すことができる．

$$u^* = \frac{\kappa u_{ref}}{\ln \frac{z_{ref} + z_0}{z_0}} \tag{10}$$

大気の速度分布の表現には，べき乗則 (power low) というものもある．

$$\bar{u} = u_{ref} \left(\frac{z - z_g}{z_{ref}} \right)^{\alpha} \tag{11}$$

ここで α はパラメタで，経験的に $\alpha = 1/7 = 0.143$ が使われる．ただし，この値は草原のような場所を想定したもので，ある程度高い障害物がある場合は値を大きくする必要がある (都市部では $\alpha = 0.25$〜0.35).

α と z_0 の関係を求めてみよう．対数則とべき乗則の速度をそれぞれ z で微分して等式とすると

$$\frac{u^*}{\kappa z} = \alpha \frac{u_{ref}}{z} \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^{\alpha} \tag{12}$$

簡単のため，$z_g = 0$ とし，対数則は分子に z_0 がない形とした．$z = z_{ref}$ とすると

$$\alpha = \frac{1}{\ln(z_{ref}/z_0)} \tag{13}$$

また

$$z_0 = z_{ref} \exp(-1/\alpha) \tag{14}$$

ただし，これらからは z_{ref} おいて速度が一致するパラメタが求まるだけであって，速度分布全体は合わない．速度分布全体を合わせるには，パラメタフィッティングを行う必要がある．

たとえば，gnuplot の fit を使う場合，まずフィッティング対象のデータを Python などで作る．

```
from math import log
f = open("data.txt", "w")
x = 1
for i in range(1, 1000):
    f.write("%f %f\n" % (x,
        5.*log((x + 1.)/1.)/log((30. + 1.)/1.)))
    x += 1.
f.close()
```

ここでは $z_{ref} = 30$，$u_{ref} = 5$，$z_0 = 1$ として対数則分布のデータを作っている．これを用いて，gnuplot で次のようにする．

```
$ gnuplot
...
gnuplot> f(x) = 5.*(x/30.)**a
gnuplot> a = 1
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> a = 0.1
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> a = 0.2
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> fit f(x) 'data.txt' via a
...
gnuplot> plot f(x), 'data.txt'
gnuplot> print a
0.207247457905221
gnuplot> quit
```

途中で何度か a の値を変えて表示しなおしているところがあるが，これは適切な初期値を設定するためである．最終的に図 1 のようなグラフが得られる．

2　乱流エネルギーとエネルギー散逸率

大気境界層の速度分布に対応する乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を求めよう．境界層内の流れが，流れ方向に特性が変わらない十分に発達した乱流である場合，対

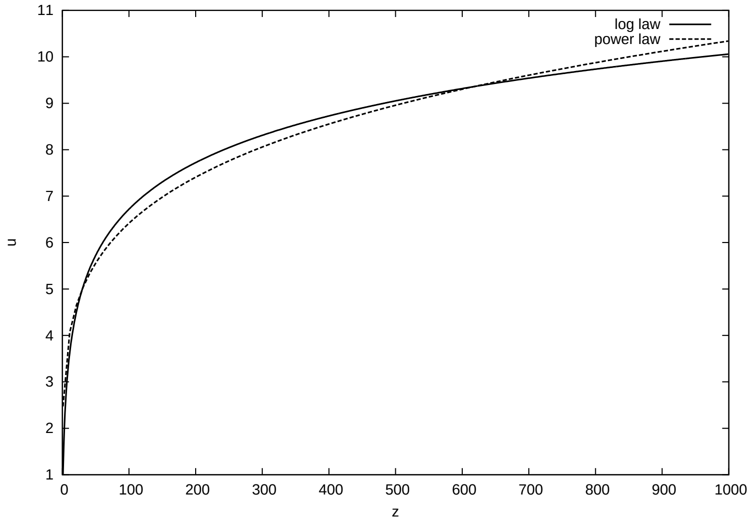

図 1: 速度分布

数則層において乱流エネルギーの生成とエネルギー散逸率との平衡性を仮定できる．

$$\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \varepsilon \tag{15}$$

ここで，ν_t は乱流粘性係数 μ_t を密度 ρ で割った乱流動粘性係数であり，次式で表される．

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{16}$$

C_μ は定数で $C_\mu = 0.09$ である．壁面せん断応力 τ_w を次式で表す．

$$\tau_w = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{17}$$

これより

$$u^{*2} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{18}$$

上式および式 (16) から，式 (15) の左辺は

$$\begin{aligned} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 &= \nu_t \left(\frac{u^{*2}}{\nu_t} \right)^2 \\ &= \frac{u^{*4}}{\nu_t} \\ &= \frac{u^{*4}}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k^2} \end{aligned} \tag{19}$$

これより式 (15) は

$$\frac{u^{*4}}{C_\mu} \frac{\varepsilon}{k^2} = \varepsilon \tag{20}$$

であるので

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{C_\mu}} \tag{21}$$

速度の対数則分布から

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^*}{\kappa}\ln\frac{z - z_g + z_0}{z_0}\right) = \frac{u^*}{\kappa(z - z_g + z_0)} \tag{22}$$

これより ε は

$$\varepsilon = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 = \frac{u^{*3}}{\kappa(z - z_g + z_0)} \tag{23}$$

参考文献

[1] 白倉昌明，大橋秀雄：流体力学 (2)，コロナ社 (1969).